## §4.3 位相の比較，位相の生成

**p. 173 1.** 集合 $S$ に於ける 2 つの位相 $\mathfrak{O}_1, \mathfrak{O}_2$ に関する開核作用子をそれぞれ $i_1, i_2$，閉包作用子をそれぞれ $a_1, a_2$ とすれば，$\mathfrak{O}_1, \mathfrak{O}_2$ よりも弱い事は次の (i) あるいは (ii) と同等である事を示せ．

(i) 任意の $M \in \mathfrak{P}(X)$ に対して $M^{i_1} \subset M^{i_2}$.

(ii) 任意の $M \in \mathfrak{P}(X)$ に対して $M^{a_1} \supset M^{a_2}$.

**解答** (i) が成立するとき，任意の $M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し $M^{a_1} = M^{ci_1c} \supset M^{ci_2c} = M^{a_2}$ より (ii) が成立．逆に (ii) が成立するとき，任意の $M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し $M^{i_1} = M^{ca_1c} \subset M^{ca_2c} = M^{i_2}$ より (i) が成立．よって (i) と (ii) は同値である．

$\mathfrak{O}_1 \leq \mathfrak{O}_2$ とする．$x \in M^{i_1}$ ならば $x \in U \subset M$ となる $U \in \mathfrak{O}_1$ が存在．$U \in \mathfrak{O}_2$ だから $x \in M^{i_2}$ であり，従って (i) が成立する．逆に (i) が成立したとする．$O \in \mathfrak{O}_1$ に対し $O = O^{i_1} \subset O^{i_2} \subset O$ より $O = O^{i_2}$，即ち $O \in \mathfrak{O}_2$．よって $\mathfrak{O}_1 \leq \mathfrak{O}_2$ となる． □

**p. 174 2.** 次の定理を証明せよ：

$\mathfrak{O}$ を $S$ に於ける 1 つの位相とするとき，その部分集合 $\mathfrak{B}$ が $\mathfrak{O}$ の基底となる為には，任意の $O \in \mathfrak{O}$ 及び任意の $x \in O$ に対して

$$x \in W, \qquad W \subset O$$

となるような $W \in \mathfrak{B}$ が存在する事が必要十分である．

**解答** $O$ を開集合とする．$\mathfrak{B}$ が基底ならば $O = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda$ となる $W_\lambda \in \mathfrak{B}$ $(\lambda \in \Lambda)$ が存在する．このとき任意の $x \in O$ に対し $x \in W_\lambda$ $(\subset O)$ となる $\lambda$ が存在する．逆に任意の $O \in \mathfrak{O}$，及び $x \in O$ に対し $x \in W \subset O$ となる $W \in \mathfrak{B}$ が存在したとする．特に各 $x \in O$ に対し $x \in W_x \subset O$ となる $W_x \in \mathfrak{B}$ を一つ固定すれば $O = \bigcup_{x \in O} W_x$．従って任意の $\varnothing$ でない開集合は $\mathfrak{B}$ の元の和集合で表される．即ち $\mathfrak{B}$ は $\mathfrak{O}$ の基底である． □

**p. 174 3.** $S$ を空でない集合とするとき，$\mathfrak{P}(S)$ の部分集合 $\mathfrak{B}$ が $\mathfrak{O}(\mathfrak{B})$ の基底となる為には，$\mathfrak{B}$ が次の性質 (O*i) 及び (O*ii) を持つ事が必要十分である事を証明せよ．

(O*i) $S$ の任意の点 $x$ に対して $x \in W$ となるような $W \in \mathfrak{B}$ が存在する．

(O*ii) $W_1 \in \mathfrak{B}, W_2 \in \mathfrak{B}, W_1 \cap W_2 \neq \varnothing$ ならば，$W_1 \cap W_2$ に属する任意の点 $x$ に対して

$$x \in W, \qquad W \subset W_1 \cap W_2$$

となるような $W \in \mathfrak{B}$ が存在する．

**解答** $\mathfrak{B}$ が $\mathfrak{O}$ の基底だとする．

(O*i) $S \in \mathfrak{O}$ だから任意の $x \in S$ に対し $x \in O$ となる $O \in \mathfrak{B}$ が存在する．

(O*ii) $O_1, O_2 \in \mathfrak{B}$ について $O_1 \cap O_2 \neq \varnothing$ だとする．$O_1 \cap O_2$ は再び開集合だから，任意の $x \in O_1 \cap O_2$ に対し $x \in O \subset O_1 \cap O_2$ となる $O \in \mathfrak{B}$ が存在する．

逆に $\mathfrak{B}$ は (O*i) (O*ii) を満たすとする．$\mathfrak{B}$ に対し

$$\mathfrak{O} = \{O \in \mathfrak{P}(S) : \text{任意の } x \in O \text{ に対し } x \in U \subset O \text{ となる } U \in \mathfrak{B} \text{ が存在する }\}$$

とすれば，$\mathfrak{O}$ は $S$ 上の (1 つの) 位相構造になる．

(Oi) $\varnothing \in \mathfrak{B}$ は自明．また (O*i) より $S \in \mathfrak{B}$ である．

(Oii) $O_1, O_2 \in \mathfrak{O}$ とする．任意の $x \in O_1 \cap O_2$ について $x \in W_i \subset O_i$ となる $W_i \in \mathfrak{B}$ $(i = 1, 2)$ が存在する．(O*ii) より $x \in W \subset W_1 \cap W_2$ となる $W \in \mathfrak{B}$ が存在し，$W \subset W_1 \cap W_2 \subset O_1 \cap O_2$．故に $O_1 \cap O_2 \in \mathfrak{O}$.

(Oiii) $\mathfrak{O}$ の定義より明らか.

$\mathfrak{O}(\mathfrak{B})$ の定義より $\mathfrak{O} \subset \mathfrak{O}(\mathfrak{B})$. 一方, $O \in \mathfrak{O}(\mathfrak{B})$ とする. 任意の $x \in O$ に対し $x \in W_1 \cap \cdots \cap W_n \subset O$ となる $W_1, \ldots, W_n \in \mathfrak{B}$ が存在. (O*ii) より $x \in W \subset W_1 \cap \cdots \cap W_n$ となる $W \in \mathfrak{B}$ が存在. 従って $O \in \mathfrak{O}$ となり, 故に $\mathfrak{O} = \mathfrak{O}(\mathfrak{B})$ である. □

※ $S$ のベキ集合 $\mathfrak{P}(S)$ の部分集合 $\mathfrak{B}$ に対する条件 (O*i) を**準開基底の公理**, 2 条件 (O*i) (O*ii) を**開基底の公理**という.

**p. 174 4.** 集合 $S$ の 2 つの部分集合系 $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ がともに条件 (O*i),(O*ii) を満たしているとき, $\mathfrak{O}(\mathfrak{B}_1) \subset \mathfrak{O}(\mathfrak{B}_2)$ となる為には, 次の条件 $(*)$ の成り立つ事が必要十分である事を示せ.

$(*)$ 任意の $V \in \mathfrak{B}_1$ と任意の $x \in V$ に対して

$$x \in W \subset V$$

となるような $W \in \mathfrak{B}_2$ が存在する.

**解答** $\mathfrak{O}(\mathfrak{B}_1) \leq \mathfrak{O}(\mathfrak{B}_2)$ だとする. 任意の $O \in \mathfrak{B}_1$ 及び $x \in O$ をとるとき, $O \in \mathfrak{O}(\mathfrak{B}_2)$ より $x \in U \subset O$ となる $U \in \mathfrak{B}_2$ が存在. 従って $(*)$ が成立する.

逆に $(*)$ が成立したとする. $O \in \mathfrak{O}(\mathfrak{B}_1)$ とする. 任意の $x \in O$ に対し $x \in U \subset O$ となる $U \in \mathfrak{B}_1$ が存在. $(*)$ より $x \in V \subset U$ となる $V \in \mathfrak{B}_2$ が存在する. 従って $O \in \mathfrak{O}(\mathfrak{B}_2)$, $\mathfrak{O}(\mathfrak{B}_1) \leq \mathfrak{O}(\mathfrak{B}_2)$ である. □

**p. 174 5.** 位相空間 $S$ に於いて $\boldsymbol{V}^*(x)$ を点 $x$ の 1 つの基本近傍系とし, また $M$ を $S$ の 1 つの部分集合とする. そのとき次の事を示せ.

(a) $x$ が $M$ の内点であるためには, ある $U \in \boldsymbol{V}^*(x)$ に対して $U \subset M$ となる事が必要十分条件である.
(b) $x$ が $M$ の外点であるためには, ある $U \in \boldsymbol{V}^*(x)$ に対して $U \cap M = \varnothing$ となる事が必要十分条件である.
(c) $x$ が $M$ の触点であるためには, すべての $U \in \boldsymbol{V}^*(x)$ に対して $U \cap M \neq \varnothing$ が成り立つ事が必要十分条件である.
(d) $x$ が $M$ の境界点であるためには, すべての $U \in \boldsymbol{V}^*(x)$ に対して $U \cap M \neq \varnothing$ かつ $U \cap M^c \neq \varnothing$ が成り立つ事が必要十分条件である.
(e) $x$ が $M$ の集積点であるためには, どの $U \in \boldsymbol{V}^*(x)$ も必ず $x$ 以外の $M$ の点を含む事が必要十分条件である.
(f) $x$ が $M$ の孤立点であるためには, 或る $U \in \boldsymbol{V}^*(x)$ に対して $U \cap M = \{x\}$ が成り立つ事が必要十分条件である.

**解答** (a) $U \subset M$ となる $U \in \boldsymbol{V}^*(x)$ が存在すれば $x$ が $M$ の内点である事は自明.

逆に $x$ が $M$ の内点ならば $x \in U \subset M$ となる開集合 $U$ が存在. 更に $x \in V \subset U$ となる $V \in \boldsymbol{V}^*(x)$ が存在し $V \subset M$ となる.

(b) $U \cap M = \varnothing$ となる $U \in \boldsymbol{V}^*(x)$ が存在すれば $x \in U \subset M^c$, 従って $x$ は $M$ の外点である.

逆に $x$ が $M$ の外点ならば $x \in U \subset M^c$ となる開集合 $U$ が存在. 更に $x \in V \subset U$ となる $V \in \boldsymbol{V}^*(x)$ が存在し $V \subset M^c$, 従って $V \cap M = \varnothing$ となる.

(c) $x$ が $M$ の触点ならば任意の $U \in \boldsymbol{V}^*(x)$ に対し $U \cap M \neq \varnothing$ である事は自明.

逆に任意の $U \in \boldsymbol{V}^*(x)$ に対し $U \cap M \neq \varnothing$ だとする. 任意の $V \in \boldsymbol{V}(x)$ に対し $V \supset U$ となる $U \in \boldsymbol{V}^*(x)$ が存在し, 仮定より $V \cap M \supset U \cap M \neq \varnothing$, 従って $x$ は $M$ の触点である.

(d) $x$ が $M$ の境界点ならば任意の $U \in \boldsymbol{V}^*(x)$ に対し $U \cap M$, $U \cap M^c \neq \varnothing$ である事は自明.

逆に任意の $U \in \boldsymbol{V}^*(x)$ に対し $U \cap M$, $U \cap M^c \neq \varnothing$ だとする. 任意の $V \in \boldsymbol{V}(x)$ に対し $V \supset U$ となる $U \in \boldsymbol{V}^*(x)$ が存在し, 仮定より $V \cap M \supset U \cap M \neq \varnothing$ かつ $V \cap M^c \supset U \cap M^c \neq \varnothing$ となるから $x$ は $M$ の境界点である.

(e) $x$ が $M$ の集積点ならば任意の $U \in \boldsymbol{V}^*(x)$ に対し $U \cap (M - \{x\}) \neq \varnothing$ である事は自明.

逆に任意の $U \in \boldsymbol{V}^*(x)$ に対し $U \cap (M - \{x\}) \neq \varnothing$ だとする. 任意の $V \in \boldsymbol{V}(x)$ に対し $V \supset U$ となる $U \in \boldsymbol{V}^*(x)$ が存在し, 仮定より $V \cap (M - \{x\}) \supset U \cap (M - \{x\}) \neq \varnothing$ となるから $x$ は $M$ の集積点である.

(f) $U \cap M = \{x\}$ となる $U \in \boldsymbol{V}^*(x)$ が存在すれば $x$ は $M$ の孤立点である事は自明.

逆に $x$ が $M$ の孤立点ならば $U \subset M = \{x\}$ となる開集合 $U$ が存在．更に $x \in V \subset U$ となる $V \in \boldsymbol{V}^*(x)$ が存在し $\{x\} \subset V \cap M \subset U \cap M = \{x\}$，従って $V \cap M = \{x\}$ となる． □

**p. 174 6.** 位相空間 $\mathbb{R}^n$ の 1 点を $x$ とするとき，$x$ を中心とする開球体 $B(x;\varepsilon)$ の全体，あるいは $x$ を含む $\mathbb{R}^n$ の開区間の全体は，何れも $x$ の基本近傍系である事を示せ．またここで $\varepsilon$ や開区間の端点としては有理数のみをとってもよい事を示せ．

**解答** $V \in \boldsymbol{V}(x)$ とすると $x \in W \subset V$ となる開集合 $W$ が存在．$\mathbb{R}^n$ の開集合の定義より $B(x;\varepsilon) \subset W$ となる $\varepsilon > 0$ が存在する．必要ならば $0 < e < \varepsilon$ となる有理数 $e$ に取り替えれば正数 $\varepsilon$ は有理数だとしてもよい．従って $x$ を中心とし，有理数の正数を半径とする開球体の全体は $x$ の基本近傍系である．

上の正の有理数 $\varepsilon$ に対し開区間 $I = \prod_{i=1}^n (x_i - \varepsilon/n, x_i + \varepsilon/n)$ を考えれば $y \in I$ に対し $|x_i - y_i| < \varepsilon/n \quad (i = 1, \ldots, n)$ だから

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \leq \sqrt{n \cdot (\varepsilon/n)^2} = \varepsilon/\sqrt{n} \leq \varepsilon,$$

従って $I \subset B(x;\varepsilon)$ となる．これより $x$ を含み，有理数の端点を持つ開区間の直積となる $\mathbb{R}^n$ 上の開区間の全体は $x$ の基本近傍系である． □

**p. 174 7.** 位相空間 $S$ の各点 $x$ に対してそれぞれ 1 つの基本近傍系 $\boldsymbol{V}^*(x)$ が与えられたとすれば，$\{\boldsymbol{V}^*(x)\}_{x \in S}$ について次の (V*i), (V*ii), (V*iii) が成り立つ事を証明せよ．

(V*i) 全ての $U \in \boldsymbol{V}^*(x)$ に対して $x \in U$.

(V*ii) $U_1 \in \boldsymbol{V}^*(x), U_2 \in \boldsymbol{V}^*(x)$ とすれば，$U_3 \subset U_1 \cap U_2$ となる $U_3 \in \boldsymbol{V}^*(x)$ が存在する．

(V*iii) 任意の $U \in \boldsymbol{V}^*(x)$ に対して，つぎの条件を満たす $W \in \boldsymbol{V}^*(x)$ が存在する:

$W$ の任意の点 $y$ に対して $U_y \subset U$ となるような $U_y \in \boldsymbol{V}^*(y)$ が存在する．

**解答**

(V*i) 自明．

(V*ii) $U_1 \cap U_2 \in \boldsymbol{V}(x)$ に対し $U_3 \subset U_1 \cap U_2$ となる $U_3 \in \boldsymbol{V}(x)$ をとればよい．

(V*iii) (Viv) (p.161) より $W$ の任意の点 $y$ について $U \in \boldsymbol{V}(y)$ となる $W \in \boldsymbol{V}(x)$ がとれる．この $W$ に対し $V \subset W$ となる $V \in \boldsymbol{V}^*(x)$ をとる．このとき任意の $y \in V$ について $U \in \boldsymbol{V}(y)$ だから $U_y \subset U$ となる $U_y \in \boldsymbol{V}^*(y)$ が存在する．

以上より基本近傍系 $\boldsymbol{V}^*(x)$ に対し，(V*i) (V*ii) (V*iii) の成立が確められた． □

※ 上に条件「(V*0) 任意の $x \in X$ に対し $\boldsymbol{V}^*(x) \neq \varnothing$」を加えた $\boldsymbol{V}^*(x)$ に対する命題を **基本近傍系の公理** という．また p.161 定理 10 の条件 (Vi) ∼ (Viv) に「(V0) 任意の $x \in X$ に対し $\boldsymbol{V}(x) \neq \varnothing$」を加えた $\boldsymbol{V}(x)$ に対する命題を **近傍系の公理** という．

**p. 175 8.** (改題) 基本近傍系の公理 (前問の※参照) を満たす族 $\{\boldsymbol{V}^*(x)\}_{x \in S}$ が与えられたとき，各 $\boldsymbol{V}^*(x)$ が $x$ の基本近傍系となるような $S$ 上の位相構造が一意的に存在する事を示せ．

**解答** 各 $x \in S$ に対し

$$\boldsymbol{V}(x) = \{U \in \mathfrak{P}(S) : V \subset U \text{ となる } V \in \boldsymbol{V}^*(x) \text{ が存在する }\}$$

と置く．(V0) ∼ (Viii) は (V*0) ∼ (V*ii) と $\boldsymbol{V}(x)$ の定義より明らか．任意の $V \in \boldsymbol{V}(x)$ に対し $U \subset V$ となる $U \in \mathbf{V}^*(\mathbf{x})$ をとり，この $U$ に対し (V*iii) の条件を満たす $W \in \boldsymbol{V}^*(x)$ をとる．任意の $y \in W$ について $U_y \subset U$ となる $U_y \in \boldsymbol{V}(y)$ が存在するから $U \in \mathfrak{V}(y)$，よって $V \in \boldsymbol{V}(y)$ となり (Viv) が成立する．

以上より $\boldsymbol{V}(x)$ は近傍系の公理 (前問の※参照) を満たす事が確められた．p.162 **定理 11** より $\boldsymbol{V}(x)$ を $x$ の近傍系とする $S$ 上の位相構造 $\mathfrak{O}$ が一意に定まる． $\square$

**p. 175 9.** 集合 $S$ に於いて，(V*i),(V*ii),(V*iii) を満たす 2 組の $(\boldsymbol{V}^*(x))_{x\in S}$,$(\boldsymbol{W}^*(x))_{x\in S}$ が与えられたとする． そのとき前問の意味でこれらから定められる位相 $\mathfrak{O}_1, \mathfrak{O}_2$ について，$\mathfrak{O}_1 \subset \mathfrak{O}_2$ が成り立つ為には，次の条件 $(*)$ が必要十分である事を示せ．

$(*)$ 任意の $V \in \boldsymbol{V}^*(x)$ に対して $W \subset V$ となる $W \in \boldsymbol{W}^*(x)$ が存在する．

**解答** $(*)$ が成立したとする． 任意の $O \in \mathfrak{O}_1$，$x \in O$ に対し $V \subset O$ となる $V \in \boldsymbol{V}^*$ が存在． $(*)$ より $W \subset V$ となる $W \in \boldsymbol{W}^*(x)$ が存在． 特に $W \subset O$ だから $x$ は $O$ の ($\mathfrak{O}_2$ に関する) 内点であり，従って $O \in \mathfrak{O}_2$ である．

逆に $\mathfrak{O}_1 \leq \mathfrak{O}_2$ だとする． $V \in \boldsymbol{V}^*(x)$ に対し $x \in U \subset V$ となる $U \in \mathfrak{O}_1$ が存在． 仮定より $U \in \mathfrak{O}_2$ だから $V \in \boldsymbol{W}(x)$, 従って $W \subset V$ となる $W \in \boldsymbol{W}^*(x)$ が存在する． $\square$

**p. 175 10.** 位相空間 $S$ が第 1 可算公理を満たすならば，$S$ の各点 $x$ に対して $V_1 \supset V_2 \supset \cdots \supset V_n \supset \cdots$ であるような (高々可算の) 基本近傍系 $\boldsymbol{V}^*(x) = \{V_1, V_2, \cdots, V_n, \cdots\}$ が存在する事を示せ．

**解答** 仮定より $x \in S$ に於いて加算個から成る基本近傍系 $\boldsymbol{W}^*(x) = \{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が存在する． これに対し $V_n = W_1 \cap \cdots \cap W_n$, $\boldsymbol{V}^*(x) = \{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と置く． 各 $n$ に対し (V*iii) より $W_i \subset V_n$ となる $W_i \in \boldsymbol{W}^*(x)$ が存在． 従って $V_n \in \boldsymbol{V}(x)$, $\boldsymbol{V}^*(x) \subset \boldsymbol{V}(x)$ である． また $V \in \mathfrak{V}(x)$ に対し $W_n \subset V$ となる $W_n \in \boldsymbol{W}^*(x)$ がとれ，$V_n \subset W_n$ だから $V_n \subset V$． よって $\boldsymbol{V}^*(x)$ は $x$ に於ける基本近傍系となる． $\square$