

§4.2 位相空間

※ 以下，“位相”は開集合系の公理を満たす部分集合族を意味する(松坂「集合・位相入門」p.164での‘位相’の説明参照).

p. 164 1. 3点より成る集合  $S = \{p, q, r\}$  に於ける位相を全部書き上げよ.

解答

- $\mathfrak{D}_{\text{triv.}} = \{\emptyset, S\}$  (密着位相),
- $\mathfrak{D}_1 = \{\emptyset, \{p\}, S\},$   $\mathfrak{D}_2 = \{\emptyset, \{q\}, S\},$   $\mathfrak{D}_3 = \{\emptyset, \{r\}, S\},$
- $\mathfrak{D}_4 = \{\emptyset, \{p, q\}, S\},$   $\mathfrak{D}_5 = \{\emptyset, \{q, r\}, S\},$   $\mathfrak{D}_6 = \{\emptyset, \{r, p\}, S\},$
- $\mathfrak{D}_7 = \{\emptyset, \{p\}, \{p, q\}, S\},$   $\mathfrak{D}_8 = \{\emptyset, \{q\}, \{p, q\}, S\},$   $\mathfrak{D}_9 = \{\emptyset, \{q\}, \{q, r\}, S\},$
- $\mathfrak{D}_{10} = \{\emptyset, \{r\}, \{q, r\}, S\},$   $\mathfrak{D}_{11} = \{\emptyset, \{r\}, \{r, p\}, S\},$   $\mathfrak{D}_{12} = \{\emptyset, \{p\}, \{r, p\}, S\},$
- $\mathfrak{D}_{13} = \{\emptyset, \{p\}, \{q, r\}, S\},$   $\mathfrak{D}_{14} = \{\emptyset, \{q\}, \{r, p\}, S\},$   $\mathfrak{D}_{15} = \{\emptyset, \{r\}, \{p, q\}, S\},$
- $\mathfrak{D}_{16} = \{\emptyset, \{p\}, \{r, p\}, \{p, q\}, S\},$   $\mathfrak{D}_{17} = \{\emptyset, \{q\}, \{p, q\}, \{q, r\}, S\},$   $\mathfrak{D}_{18} = \{\emptyset, \{r\}, \{q, r\}, \{r, p\}, S\},$
- $\mathfrak{D}_{19} = \{\emptyset, \{p\}, \{q\}, \{p, q\}, S\},$   $\mathfrak{D}_{20} = \{\emptyset, \{q\}, \{r\}, \{q, r\}, S\},$   $\mathfrak{D}_{21} = \{\emptyset, \{r\}, \{p\}, \{r, p\}, S\},$
- $\mathfrak{D}_{22} = \{\emptyset, \{p\}, \{q\}, \{p, q\}, \{q, r\}, S\},$   $\mathfrak{D}_{23} = \{\emptyset, \{q\}, \{r\}, \{p, q\}, \{q, r\}, S\},$
- $\mathfrak{D}_{24} = \{\emptyset, \{q\}, \{r\}, \{q, r\}, \{r, p\}, S\},$   $\mathfrak{D}_{25} = \{\emptyset, \{r\}, \{p\}, \{q, r\}, \{r, p\}, S\},$
- $\mathfrak{D}_{26} = \{\emptyset, \{r\}, \{p\}, \{r, p\}, \{p, q\}, S\},$   $\mathfrak{D}_{27} = \{\emptyset, \{p\}, \{q\}, \{r, p\}, \{p, q\}, S\},$
- $\mathfrak{D}_d = \mathfrak{P}(S)$  (離散位相)

(ここで  $\mathfrak{P}(S)$  は  $S$  のベキ集合を表す). □

p. 165 2. 定理 7' を証明せよ :

定理 7'  $\emptyset$  ではない集合  $S$  のベキ集合\*1  $\mathfrak{P}(S)$  から  $\mathfrak{P}(S)$  への写像  $a : M \rightarrow a(M)$  が条件

- (Ki)  $a(\emptyset) = \emptyset.$
- (Kii) 任意の  $M \in \mathfrak{P}(S)$  に対し  $a(M) \supset M.$
- (Kiii) 任意の  $M, N \in \mathfrak{P}(S)$  に対し  $a(M \cup N) = a(M) \cup a(N).$
- (Kiv) 任意の  $M \in \mathfrak{P}(S)$  に対し  $a(a(M)) = a(M).$

を満たすとき,  $S$  上の位相  $\mathfrak{D}$  で, この位相に関する任意の部分集合  $M$  の閉包  $\overline{M}$  が  $a(M)$  と一致するものが一意に存在する.

解答 (1) 位相構造の定義 :

$$\mathfrak{D} = \{M \subset S : a(M^c) = M^c\}$$

と置く.

- (Oi) (Ki) より  $a(S^c) = a(\emptyset) = \emptyset = S^c$  より  $S \in \mathfrak{D}.$  (Kiv) より  $a(\emptyset^c) = a(S) \supset S,$  従って  $a(S) = S$  だから  $\emptyset = S^c \in \mathfrak{D}.$
- (Oii)  $O_1, O_2 \in \mathfrak{D}$  とすると (Kiii) より

$$a((O_1 \cap O_2)^c) = a(O_1^c \cup O_2^c) = O_1^c \cup O_2^c = (O_1 \cap O_2)^c$$

より  $O_1 \cap O_2 \in \mathfrak{D}.$

---

\*1 一般に集合  $X$  の部分集合全体の成す集合を  $X$  のベキ集合 (power set) といい, これを  $\mathfrak{P}(X)$  と記す.  $2^X$  と記す事もある.

(Oiii)  $M \subset N$  となる部分集合  $M, N$  に対し  $M \cup N = N$  だから, (Kii) より  $a(M) \cup a(N) = a(M \cup N) = a(N)$ , 従って  $a(M) \subset a(N)$ .  $O_\lambda \in \mathfrak{D}$  ( $\lambda \in \Lambda$ ) に対し  $O = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$  と置くと  $O^c \subset O_\lambda^c$  だから, 上述の包含関係より

$$a(O^c) \subset a(O_\lambda^c) = O_\lambda, \quad \therefore a(O^c) \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda = \left( \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \right)^c = O^c$$

となるから, (Kii) と併せて  $O^c = a(O^c)$ , 即ち  $O \in \mathfrak{D}$  となる.

以上より  $\mathfrak{D}$  が  $S$  上の位相構造になる事が確かめられた.

(2) 部分集合  $F \subset S$  に対し  $F$  は閉集合  $\Leftrightarrow a(F) = F$  が成立する. 実際,  $F$  が閉集合ならば  $F^c$  は開集合だから, 位相構造  $\mathfrak{D}$  の定義より  $a(F) = a((F^c)^c) = (F^c)^c = F$  となる. 逆に部分集合  $F$  について  $a(F) = F$  だとすると,  $a((F^c)^c) = a(F) = F = (F^c)^c$  より  $F^c \in \mathfrak{D}$ , 従って  $F$  は閉集合である.

(3) 部分集合  $M \subset S$  に対し  $a(M)$  と位相構造  $\mathfrak{D}$  に関する閉包  $\overline{M}$  ( $= M$  を含む最小の閉集合) は一致する. 実際, (Kiv) (Kii) 及び (2) より  $a(M)$  は  $M$  を含む閉集合, 従って  $\overline{M} \subset a(M)$  となる. 一方, (1) (Oiii) の証明中の事実, (2) 及び  $M \subset \overline{M}$  より  $a(M) \subset a(\overline{M}) = \overline{M}$ . 従って  $\overline{M} = a(M)$  となる.

(4)  $\mathfrak{D}'$  は  $a$  が閉包作用素となるような  $S$  上の位相構造とすると  $S$  の部分集合  $O$  について

$$O \text{ は } (\mathfrak{D} \text{ に関する}) \text{ 開集合} \Leftrightarrow O^c \text{ は } (\mathfrak{D} \text{ に関する}) \text{ 閉集合} \Leftrightarrow a(O^c) = O^c \Leftrightarrow O \in \mathfrak{D}$$

となる. 故に  $\mathfrak{D}' = \mathfrak{D}$ . □

**p. 164 3.**  $x$  を位相空間  $S$  の点,  $M$  を  $S$  の部分集合とすると,  $x \in \overline{M}$  であるためには,  $x$  を含む任意の開集合  $O$  に対して  $O \cap M \neq \emptyset$  となる事が必要十分である事を示せ.

**解答**  $x \in \overline{M}$  だとする.  $O \cap M = \emptyset$ , かつ  $x$  を含む開集合  $O$  が存在したとする. このとき  $O^c$  は  $M$  を含む閉集合だから  $\overline{M} \subset O^c$ , 従って  $\overline{M} \cap O = \emptyset$  となり  $x \in O \cap \overline{M}$  に反する. 故に  $x$  を含む任意の開集合  $O$  に対し  $O \cap M \neq \emptyset$  となる.

逆に  $x$  を含む任意の開集合  $O$  に対し  $O \cap M \neq \emptyset$  だとする.  $\overline{M}$  は  $M$  の含む閉集合全体の共通部分だから, 仮に  $x \notin \overline{M}$  だとすると,  $x \notin F$  かつ  $M \subset F$  となる開集合  $F$  が存在する.  $F^c$  は  $x$  を含む開集合だから, 仮定より  $F^c \cap M \neq \emptyset$ , 従って  $M \not\subset F$  となるが, これは矛盾している. 故に  $x \in \overline{M}$  である. □

**p. 164 4.**  $O$  を位相空間  $S$  の 1 つの開集合とすれば,  $S$  の任意の部分集合  $M$  に対して,  $O \cap \overline{M} \subset \overline{O \cap M}$  である事を示せ (従って特に,  $O \cap M = \emptyset$  ならば  $O \cap \overline{M} = \emptyset$  である). これに双対的な命題はどんな命題か.

**解答**  $x \in O \cap \overline{M}$  とする.  $U$  を  $x$  を含む開集合だとすると  $U \cap O$  も  $x$  を含む開集合である.  $x \in \overline{M}$  だから  $U \cap (O \cap M) = (U \cap O) \cap M \neq \emptyset$ . 問題 3 より  $x \in \overline{O \cap M}$  となる.

この命題に対し, 位相的対偶律\*2により成立する命題は「閉集合  $F$  をとるとき,  $S$  の任意の部分集合  $M$  に対し  $F \cup M^i \supset (F \cup M)^i$  である」となる (特に  $F \cup M = S$  ならば  $F \cup M^i = S$  である).

(実際,  $S$  の任意の部分集合  $X$  について p.158 (2.7) の性質  $X^{ci} = X^{ac}$  が成立する事に注意する.  $O = F^c$  (開集合),  $N = M^c$  ( $M$  の補集合) とするとき, 元の命題より  $O \cap N^a \subset (O \cap N)^a$  が成立. これらの補集合に関する包含関係は  $(O \cap N^a)^c \supset (O \cap N)^{ac}$  であり,

$$(\text{左辺}) = (O \cap N^a)^c = O^c \cup N^{ac} = F \cup N^{ci} = F \cup M^i, \quad (\text{右辺}) = (O \cap N)^{ci} = (O^c \cup N^c)^i = (F \cup M)^i$$

だから  $F \cup M^i \supset (F \cup M)^i$  が成立する. ) □

\*2 或る位相的な性質に対し p.159 の操作, 即ち,  $S \leftrightarrow \emptyset$ ,  $i \leftrightarrow a$ ,  $\cup \leftrightarrow \cap$ ,  $\subset \leftrightarrow \supset$  という入れ替え操作を施して得られる位相的性質は再び成立するという法則

p. 165 5. 位相空間  $S$  の任意の部分集合  $M$  に対して  $M^{aiai} = M^{ai}$ ,  $M^{iaia} = M^{ia}$  が成り立つ事を示せ.

解答  $M^{aia} \supset M^{ai}$  より  $M^{aiai} \supset M^{ai}$ . 一方,  $M^{ai} \subset M^a$  より  $M^{aia} \subset M^a$ ,  $M^{aiai} \subset M^{ai}$ . 従って  $M^{aiai} = M^{ai}$ .  $M^{iai} \subset M^{ia}$  より  $M^{iaia} \subset M^{ia}$ . 一方,  $M^{ia} \supset M^i$  より  $M^{iai} \supset M^i$ ,  $M^{iaia} \supset M^{ia}$ . 従って  $M^{iaia} = M^{ia}$ .  $\square$

p. 165 6. 位相空間  $S$  の部分集合  $M$  に対して次の事を示せ.

- (a)  $M^f$  は閉集合である.
- (b)  $M$  が開集合である事は  $M \cap M^f = \emptyset$  と同値である.
- (c)  $M$  が閉集合である事は  $M^f \subset M$  と同値である.

解答 (a)  $M$  の内部  $M^i$  及び外部  $M^e (= M^{ci})$  は共に開集合だから  $M^f = S - (M^i \cup M^e)$  は閉集合である.

(b)  $M = M^i \cup (M \cap M^f)$ ,  $M \cap M^f = M - M^i$  より  $M \cap M^f = \emptyset \Leftrightarrow M - M^i = \emptyset$ .  $M^i \subset M$  だから  $M - M^i = \emptyset \Leftrightarrow M = M^i$ . 従って  $M \cap M^f = \emptyset \Leftrightarrow M = M^i$ .

(c)  $M^a = M \cup M^f$  より  $M^f \subset M \Leftrightarrow M^a = M$  となる.  $\square$

p. 165 7. 位相空間  $S$  の部分集合  $M$  の集積点全体の集合を  $M^d$ , 孤立点全体の集合を  $M^s$  とすれば,  $\overline{M} = M^d \cup M^s$ ,  $M^d \cap M^s = \emptyset$  である事を示せ.

解答 定義より  $M^d \cup M^s \subset M^a$  は明らか. 逆に  $x \in M^a$  だとする.  $x \notin M^d$  だとすると  $U \cap (M - \{x\}) = \emptyset$  となる  $x$  の近傍  $U$  が存在する.  $x \in M^a$  より  $U \cap M \neq \emptyset$  だから  $U \cap M = \{x\}$ , 即ち  $x \in M^s$  となる. よって  $M^a \subset M^d \cup M^s$ ,  $M^a = M^d \cup M^s$  である.

$x \in M^d \cap M^s$  だとすると  $x \in M^s$  だから  $M \cap U = \{x\}$  となる  $x$  の開集合  $U$  が存在する. 一方,  $x \in M^d$  より  $U \cap (M - \{x\}) \neq \emptyset$  となり矛盾. 故に  $M^d \cap M^s = \emptyset$  である.  $\square$

p. 165 8. 位相空間  $S$  の任意の部分集合  $M$  に対して  $M^{af} \subset M^f$ ,  $M^{if} \subset M^f$  が成立する事を証明せよ.

解答  $M^{ai} \supset M^i$  より  $M^{af} = M^{aa} - M^{ai} = M^a - M^{ai} \subset M^a - M^i = M^f$ .  $M^{ia} \subset M^a$  より  $M^{if} = M^{ia} - M^{ii} = M^{ia} - M^i \subset M^a - M^i = M^f$ .  $\square$

p. 165 9. 位相空間  $S$  の任意の部分集合  $M, N$  に対して  $(M \cup N)^f \subset M^f \cup N^f$  が成立する事を証明せよ.

解答  $M^i \subset (M \cup N)^i$ ,  $N^i \subset (M \cup N)^i$  (p. 156 (Oiii) 内の証明 (2.5) 参照) より

$$\begin{aligned} (M \cup N)^f &= (M \cup N)^a - (M \cup N)^i = M^a \cup N^a - (M \cup N)^i \\ &= (M^a - (M \cup N)^i) \cup (N^a - (M \cup N)^i) \subset (M^a - M^i) \cup (N^a - N^i) = M^f \cup N^f. \end{aligned}$$

$\square$