第 4 章　位相空間

§4.1　$\mathbb{R}^n$ の距離と位相

p. 151　1.　$\mathbb{R}^n$ の有限個の点から成る部分集合 A は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である事を示せ．

解答　$A = \{p\}$ (1 点集合) の場合．A の補集合 $A^c = \mathbb{R}^n - A$ の各点 y について $B(y; d(x, y)) \subset A^c$ となるから A^c は開集合，従って A は閉集合である．一般の有限集合 $A = \{p_1, \ldots, p_m\}$ の場合，補集合は m 個の開集合 $\mathbb{R}^n - \{p_i\}$ の共通部分，即ち $A^c = \bigcap_{i=1}^m (\mathbb{R}^n - \{p_i\})$ と表されるから A^c は開集合，従って A は閉集合である．　□

p. 151　2.　a, b を $\mathbb{R}^n$ の相異なる 2 点とすれば，$a \in U$，$b \in V$，$U \cap V = \varnothing$ となる $\mathbb{R}^n$ の開集合 U, V が存在する事を示せ．

解答　$\varepsilon = d(a, b)/4$ と置く．$a \neq b$ より $\varepsilon > 0$．$U = B(a; \varepsilon), V = B(b; \varepsilon)$ と置けば U, V は開集合であり (p.145 **例 2**)，$a \in U$，$b \in V$ である．仮に $x \in U \cap V$ だとすると

$$d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) < 2\varepsilon = d(a, b)/2$$

となり矛盾．故に $U \cap V = \varnothing$．よってこれらが求める開集合である．　□

p. 151　3.　$\mathbb{R}^n$ の閉区間 $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である事，$\mathbb{R}^n$ の閉区間 $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である事を示せ．

解答　$I = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ が開集合である事：$x = (x_1, \cdots, x_n) \in I$ に対し $0 < \varepsilon < \min\{|a_i - x_i|,\ |b_i - x_i|\ (i = 1, \ldots, n)\}$ となる ε をとる．任意の $y = (y_1, \cdots, y_n) \in B(x; \varepsilon)$ に対し

$$|y_i - x_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2} = d(x, y) < \varepsilon \leq |a_i - x_i|,\ |b_i - x_i| \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

だから $y \in I$，従って $B(x; \varepsilon) \subset I$．故に I の任意の点は内点となり，I は開集合である．

$J = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ が閉集合である事：

$$J = ([a_1, b_1] \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap (\mathbb{R} \times [a_2, b_1] \times \mathbb{R}^{n-2}) \cap \cdots \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times [a_n, b_n]) = \bigcap_{j=1}^n \mathbb{R}^{j-1} \times [a_j, b_j] \times \mathbb{R}^{n-j}$$

より J の補集合 J^c は

$$\begin{aligned} J^c &= \left(\bigcap_{j=1}^n \mathbb{R}^{j-1} \times [a_j, b_j] \times \mathbb{R}^{n-j} \right)^c = \bigcup_{j=1}^n (\mathbb{R}^{j-1} \times [a_j, b_j] \times \mathbb{R}^{n-j})^c \\ &= \bigcup_{j=1}^n (\mathbb{R}^{j-1} \times (-\infty, a_j) \times \mathbb{R}^{n-j} \cup \mathbb{R}^{j-1} \times (b_j, \infty) \times \mathbb{R}^{n-j}). \end{aligned}$$

前者より $\mathbb{R}^{j-1} \times (-\infty, a_j) \times \mathbb{R}^{n-j}$，$\mathbb{R}^{j-1} \times (b_j, \infty) \times \mathbb{R}^{n-j}$ は開集合だから，p.145 **定理 2** (iii) より J^c は開集合．従って p.145 **定理 1** より J は閉集合である．　□

p. 151　4.　$\mathbb{R}^2$ の次の各部分集合について，その内部と閉包を求めよ．

(a)　t の 2 次方程式 $t^2 + x_1 t + x_2 = 0$ が実根をもつような $x = (x_1, x_2)$ 全体の集合 A.

(b)　t の 2 次方程式 $t^2 + x_1 t + x_2 = 0$ が虚根をもつような $x = (x_1, x_2)$ 全体の集合 B.

(c)　$C = \mathbb{Q}^2$ $(= \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 \in \mathbb{Q}\})$.

(d)　$D = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 = x_2 < 1\}$.

(e)　$x_1 = a + b,\ x_2 = a^2 + b^2,\ a > 0,\ b > 0$ を満足する実数 a, b が存在するような $x = (x_1, x_2)$ 全体の集合 E.

解答　(a) (b)　2 次方程式 $t^2 + x_1 t + x_2 = 0$ は実数解をもつ　$\Leftrightarrow$　判別式 $x_1^2 - 4x_2$ は非負　だから

$$A = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 \geq 4x_2\}, \qquad A^i = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 > 4x_2\}, \qquad \overline{A} = A,$$

$$B = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 < 4x_2\}, \qquad B^i = B, \qquad \overline{B} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 \leq 4x_2\}.$$

(c)　仮に $C^i \neq \varnothing$ だとする．このとき $x \in C^i$ に対し $B(x;\varepsilon) \subset C$ となる $\varepsilon > 0$ が存在．$\sqrt{p}\varepsilon > 1$ となる素数 p をとれば $x + (p, 0) \notin C$ かつ $x + (\sqrt{p}, 0) \in B(x;\varepsilon)$ となるが，これは $B(x;\varepsilon) \subset C$ と矛盾する．故に $C^i = \varnothing$.

一方，任意の $x \in \mathbb{R}^2$ 及び $\varepsilon > 0$ をとれば，実数体に於ける有理数体の稠密性より

$$B(x;\varepsilon) \cap C \supset ((x_1 - \varepsilon/\sqrt{2}, x_1 + \varepsilon/\sqrt{2}) \times (x_2 - \varepsilon/\sqrt{2}, x_2 + \varepsilon/\sqrt{2})) \cap C \neq \varnothing$$

が成立．従って $x \in \overline{C}$，即ち $\mathbb{R}^2 \subset \overline{C}$，$\mathbb{R}^2 = \overline{C}$ となる．

(d)　$x \in D^i$ だとすると $B(x;\varepsilon) \subset D$ となる $\varepsilon > 0$ が存在する．このとき $B(x;\varepsilon)$ の点 $(x_1 + \frac{\sqrt{2}\varepsilon}{4}, x_1 - \frac{\sqrt{2}\varepsilon}{4})$ は D に属さず，$B(x;\varepsilon) \subset D$ と矛盾．故に $D^i = \varnothing$．一方，閉包は $\overline{D} = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 = x_2 \leq 1\}$ となる．

(e)　$a > 0$ かつ $b > 0$　$\Leftrightarrow$　$ab > 0$ かつ $a + b > 0$　$\Leftrightarrow$　$x_1^2 - x_2\ (= 2ab) > 0$ かつ $x_1 > 0$.

$x_1 = a + b,\ x_2 = a^2 + b^2$ となる実数 a, b が存在する．

$\Leftrightarrow$　$x_1 = a + b,\ (x_1^2 - x_2)/2 = ab$ となる実数 a, b が存在する．

$\Leftrightarrow$　2 次方程式 $t^2 - x_1 t + (x_1^2 - x_2)/2 = 0$ が実数解を持つ．

$\Leftrightarrow$　$x_1 - 4 \cdot (x_1^2 - x_2)/2 = -x_1^2 + 2x_2 \geq 0$.

$$\therefore \qquad E = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0 \text{ かつ } x_1^2/2 \leq x_2 < x_1^2\}.$$

$$E^i = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0 \text{ かつ } x_1^2/2 < x_2 < x_1^2\}, \qquad \overline{E} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0 \text{ かつ } x_1^2/2 \leq x_2 \leq x_1^2\}.$$

□

p. 151　5.　定理 2′「$\mathbb{R}^n$ の閉集合全体の集合 $\mathfrak{A}$ について次が成立する：

(i)′　$\mathbb{R}^n \in \mathfrak{A},\ \varnothing \in \mathfrak{A}$.

(ii)′　$A_1, \cdots, A_k \in \mathfrak{A}$ ならば $A_1 \cup \cdots \cup A_k \in \mathfrak{A}$.

(iii)′　$A_\lambda \in \mathfrak{A}$ $(\lambda \in \Lambda)$ ならば $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \mathfrak{A}$.」

を証明せよ．

解答　(i)′　$\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n$ は自明．$x \in \overline{\varnothing}$ だとすると $B(x;\varepsilon) \cap \varnothing \neq \varnothing$ $(\forall\ \varepsilon > 0)$ という矛盾が導かれるから $\overline{\varnothing} = \varnothing$. $\therefore\ \mathbb{R}^n, \varnothing \in \mathfrak{A}$.

(ii)′　$A_1, \ldots, A_k \in \mathfrak{A}$ だとする．$x \in \overline{A_1 \cup \cdots \cup A_k}$ について $x \notin A_i = \overline{A_i}$ $(\forall\ i)$ だとすると，$B(x;\varepsilon) \cap A_i = \varnothing$ となる $\varepsilon > 0$ が存在．$B(x;\varepsilon) \cap (A_1 \cup \cdots \cup A_k) = \varnothing$ となるが，これは x のとり方に反する．従って $\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_k} = A_1 \cup \cdots \cup A_k$，即ち $A_1 \cup \cdots \cup A_k \in \mathfrak{A}$.

(iii)′　$A_\lambda \in \mathfrak{A}$ $(\lambda \in \Lambda)$ だとする．$x \in \overline{\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda}$ だとすると任意に $\lambda \in \Lambda$ に対し

$$B(x;\varepsilon) \cap A_\lambda \supset B(x;\varepsilon) \cap \left(\bigcap\nolimits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) \neq \varnothing \qquad (\varepsilon > 0),$$

従って $x \in \overline{A_\lambda} = A_\lambda$ となり，$x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$．よって $\overline{\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda} = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$，即ち $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \in \mathfrak{A}$ となる． □

p. 151　6.　定理 3 の後半「閉包 $\overline{M}$ は M を含む最小の閉集合である」を証明せよ．

解答　$\overline{M}$ に含まれない $\overline{\overline{M}}$ の元 x がとれたとする．$x \notin \overline{M}$ より $B(x;\varepsilon) \cap M = \varepsilon$ となる $\varepsilon > 0$ が存在．一方，$x \in \overline{\overline{M}}$ より $y \in B(x;\varepsilon/2) \cap \overline{M}$ がとれ，更に $z \in B(y;\varepsilon/2) \cap M$ がとれるが，$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < \varepsilon_0$，即ち $z \in B(x;\varepsilon_0) \cap M$ となり矛盾．故に $\overline{M}$ は閉集合である．

次に F を M を含む閉集合とする．$x \in \overline{M}$ について $B(x;\varepsilon) \cap F \supset B(x;\varepsilon) \cap M \neq \varnothing$ $(\forall\, \varepsilon > 0)$ より $x \in \overline{F} = F$．故に $x \in \overline{M} \subset F$．従って $\overline{M}$ は M を含む最小の閉集合となる． □

p. 151　7.　$\mathbb{R}^n$ の開集合系 $\mathfrak{O} = \mathfrak{O}(\mathbb{R}^n)$ の部分集合 $\mathfrak{B}$ が $\mathfrak{O}$ の基底であるためには，$\mathbb{R}^n$ の任意の開集合 O $(\neq \varnothing)$ と O の任意の点 a に対し $a \in U \subset O$ となる $\mathfrak{B}$ の元 U が存在する事が必要十分である事を示せ．またこの条件は，$\mathbb{R}^n$ の任意の点 a と任意の正数 ε とに対し $a \in U \subset B(a;\varepsilon)$ となる $\mathfrak{B}$ の元 U が存在する事とも同等である事を示せ．

解答　$\mathfrak{B}$ に関する命題 (i) (ii) (iii) を次のように置く．

(i)　$\mathfrak{B}$ は $\mathfrak{O}$ の基底．
(ii)　任意の開集合 O $(\neq \varnothing)$ 及び点 $a \in O$ に対し $a \in U \subset O$ となる $U \in \mathfrak{B}$ が存在する．
(iii)　任意の点 $a \in \mathbb{R}^n$ 及び $\varepsilon > 0$ に対し $a \in U \subset B(a;\varepsilon)$ となる $U \in \mathfrak{B}$ が存在する．

これらが互いに同値である事を示せばよい．

(i) $\Rightarrow$ (ii)　O に対し $O = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ となる $\mathfrak{B}$ の部分族 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ がとれる．このとき任意の $a \in O$ に対し $a \in U_\lambda$ となる $\lambda \in \Lambda$ が存在し，よって (ii) が成立する．

(ii) $\Rightarrow$ (iii)　開球 $B(a;\varepsilon)$ は開集合だから，(ii) より $a \in U \subset B(a;\varepsilon)$ となる $U \in \mathfrak{B}$ が存在する．

(iii) $\Rightarrow$ (i)　O を $\varnothing$ ではない開集合とする．O の各点 a に対し $B(a;\varepsilon_a) \subset O$ となる $\varepsilon_a > 0$ が存在．更に (iii) より $a \in U_a \subset B(a;\varepsilon_a)$ となる $U_a \in \mathfrak{B}$ をとる．このとき $O = \bigcup_{a\in O} U_a$ となるから O は $\mathfrak{B}$ の元の和集合で表される． □

p. 151　8.　$a = (a_1, \cdots, a_n)$ を $\mathbb{R}^n$ の点，ε を正の実数とするとき，$\varepsilon' = \varepsilon/\sqrt{n}$ と置けば

$$(a_1 - \varepsilon', a_1 + \varepsilon') \times \cdots \times (a_n - \varepsilon', a_n + \varepsilon') \ \subset \ B(a;\varepsilon)$$

が成り立つ事を示せ．この事から $\mathbb{R}^n$ の開区間の全体は $\mathfrak{O}(\mathbb{R}^n)$ の基底を成す事を導け．

解答　$x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対し $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| : i = 1, \ldots, n\}$，$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ と置けば

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \leq \sqrt{n\|x\|_\infty^2} \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

となる．$x \in (a_1 - \varepsilon', a_1 + \varepsilon') \times \cdots \times (a_n - \varepsilon', a_n + \varepsilon')$ ならば $\|x\|_\infty < \varepsilon'$ となるから

$$d(x,a) = \|x - a\| \leq \sqrt{n}\|x - a\|_\infty < \sqrt{n}\varepsilon' = \varepsilon,$$

即ち $x \in B(a;\varepsilon)$ となる． □