

§ 29 実連続関数

p. 162 問 29. 1 閉区間  $[0, 1]$  上の実連続関数列  $\{h_n\}$  を帰納的に

$$h_1(t) = 0, \quad h_{n+1}(t) = h_n(t) + \frac{t - h_n(t)^2}{2} \quad (29.1)$$

によって定義すれば,  $\{h_n\}$  は多項式であり, かつ  $\sqrt{t}$  に一様収束する事を示せ.

解答  $h_n$  が多項式である事は明らか.  $t \in [0, 1]$  に対し  $1 - h_{n+1}(t) = \frac{1-t+(1-h_n(t))^2}{2}$  と帰納法より  $h_n(t) \leq 1$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) が成立.

$$\sqrt{t} - h_{n+1}(t) = \sqrt{t} - h_n(t) - \frac{t - h_n(t)^2}{2} = (\sqrt{t} - h_n(t)) \frac{1 - \sqrt{t} + 1 - h_n(t)}{2} \quad (29.2)$$

と帰納法より  $h_n(t) \leq \sqrt{t}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) が成立し, 定義式と帰納法より  $h_n(t) \geq 0$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) が成立.

$$h_{n+1}(t) - h_n(t) = \frac{t - h_n(t)^2}{2} = (\sqrt{t} - h_n(t)) \frac{\sqrt{t} + h_n(t)}{2}$$

と帰納法より  $h_n(t) \leq h_{n+1}(t)$  となる. 各  $t$  に対し  $\{h_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$  は有界な単調増加数列だから極限  $h(t) (\in [0, \sqrt{t}])$  が存在し, (29.1) より

$$h(t) = h(t) + \frac{t - h(t)^2}{2}, \quad \therefore h(t) = \sqrt{t}$$

となる. 従って Dini の定理より  $[0, 1]$  上,  $h_n(t)$  は  $\sqrt{t}$  に一様収束する. □

p. 162 問 29. 2  $X$  はコンパクトだとする. このとき  $C(X)$  の部分多元環  $S$  に対して, 閉包  $S^a$  も  $C(X)$  の部分多元環になる事を示せ.

解答  $f \in C(X)$  に対して  $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$  と置く.

加法:  $f, g \in S^a$  とする. 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して  $\|f - f'\| < \varepsilon/2$ ,  $\|g - g'\| < \varepsilon/2$  となる  $f', g' \in S$  が存在. このとき

$$\|(f+g) - (f'+g')\| \leq \|f - f'\| + \|g - g'\| < \varepsilon, \quad f' + g' \in S$$

より  $f+g \in S^a$  となる.

スカラー乗法:  $f \in S^a$ ,  $c \in \mathbb{R}$  とする. 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して  $\|f - f'\| < \varepsilon/(|c|+1)$  となる  $f' \in S$  が存在.

$$\|cf - cf'\| \leq |c|\|f - f'\| < \frac{|c|\varepsilon}{|c|+1} < \varepsilon, \quad cf' \in S$$

より  $cf \in S^a$  となる.

乗法:  $f, g \in S^a$  とする. 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して  $\|f - f'\| < \varepsilon/2(\|g\|+1)$  となる  $f' \in S$  が存在. 更に  $\|g - g'\| < \varepsilon/2(\|f'\|+1)$  となる  $g' \in S$  が存在する. このとき

$$|(fg)(x) - (f'g')(x)| \leq |f(x) - f'(x)||g(x)| + |f'(x)||g(x) - g'(x)| \leq \|f - f'\|\|g\| + \|f'\|\|g - g'\|$$

より  $\|fg - f'g'\| \leq \|f - f'\|\|g\| + \|f'\|\|g - g'\|$ . 更に

$$\|fg - f'g'\| \leq \frac{\|g\|\varepsilon}{2(\|g\|+1)} + \frac{\|f'\|\varepsilon}{2(\|f'\|+1)} < \varepsilon, \quad f'g' \in S$$

より  $fg \in S^a$  である.

以上より  $S^a$  は  $C(X)$  の部分多元環である. □

p. 162 問 29. 3,4,5 Stone-Weierstrass の定理の証明の補完. 省略する.

p. 165 問 29. 6 閉区間  $[a, b]$  上の任意の実連続関数  $f(x)$  と任意の正数  $\varepsilon$  に対して, 実数係数の  $x$  についての多項式  $P(x)$  を選んで, 閉区間  $[a, b]$  に属する全ての実数  $x$  に対して

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon$$

が成り立つようにできる事を示せ.

解答 実係数の多項式の全体  $\mathbb{R}[x]$  は  $C[a, b]$  の部分多元環である事は明らか.  $t \neq s$  となる任意の  $t, s \in [a, b]$  に対し  $f(x) = x - t$  とすれば  $f \in \mathbb{R}[x]$  であり, かつ  $f(t) = 0, f(s) = s - t \neq 0$ . 更に定数関数 1 をとれば任意の  $t \in [a, b]$  に対し  $1(t) \neq 0$ . 従って Stone-Weierstrass の定理より  $\mathbb{R}[x]$  は  $C[a, b]$  に於いて一様収束位相に関し稠密となる.  $\square$

p. 166 問 29. 7 通常の位相を持った  $\mathbb{R}$  と開区間  $(0, 1)$  について,  $f(x) = x^{-1}$  で与えられる開区間  $(0, 1)$  上の実連続関数  $f$  は  $\mathbb{R}$  上の実連続関数に拡張できない事を示せ.

解答  $f$  の  $\mathbb{R}$  上の (実連続関数としての) 拡張が存在したとする. 拡張の  $[-1, 1]$  への制限を  $\tilde{f}$  と記せば, これは連続である.  $[-1, 1]$  はコンパクトだから  $\tilde{f}$  は最大値を持つが,

$$\tilde{f}(0) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \tilde{f}(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{x} = \infty$$

となり, 最大値が存在せず矛盾する.  $\square$