## § 27　距離空間のコンパクト性

**p. 148　問 27. 1**　距離空間 $(X, d)$ に於いて，$X$ の部分集合 $A$ が集積点を持たなければ，$X$ の各点は集合 $A$ と高々 1 点で交わる開近傍を持つ事を確かめよ．

**解答**　$x \in X$ とする．仮定より $A \cap (U - \{x\}) = \varnothing$ となる $x$ の開近傍 $U$ が存在．このとき $x \in A$ ならば $A \cap U = \{x\}$ であり，$x \notin A$ ならば $A \cap U = \varnothing$ となる．□

**p. 148　問 27. 2**　Hilbert 空間 $(l^2, d_2)$ の単位球面はコンパクトではない事を示せ．

**解答**　$e_i = \{\delta_{in}\}_{n\in\mathbb{N}}$　($\delta_{in}$ は Kronecker の delta) とする．$d_2(e_i, e_j) = \sqrt{2}$　$(i \neq j)$ より単位球面上の点列 $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ は如何なる部分列も収束しない．故に単位球面はコンパクトではない．□

**p. 149　問 27. 3**　$(X, d)$ をコンパクトな距離空間とする．写像 $f : X \to Y$ が与えられ，$X$ の相違なる 2 点 $x, y$ に対して常に

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$

が成り立っているものとする．更に $X$ 上の実数値関数 $\rho$ を $\rho(x) = d(x, f(x))$ によって定義する．

(1)　$X$ の 2 点 $x, y$ に対して常に

$$|\rho(x) - \rho(y)| \leq 2d(x, y)$$

が成り立つ事を示せ．

(2)　実数値関数 $\rho$ の最小値が 0 になる事を示し，写像 $f$ がただ一つの不動点を持つ事を確かめよ．

(3)　$X$ の任意の点 $x$ に対して

$$x_1 = f(x), \quad x_2 = f(x_1), \quad \cdots, \quad x_{n+1} = f(x_n), \quad \cdots$$

と置く．このようにして出来る点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は常に $f$ のただ一つの不動点に収束する事を示せ．

**解答**　(1)　三角不等式より

$$\rho(x) \leq d(x, y) + d(y, f(y)) + d(f(y), f(x)) \leq 2d(x, y) + \rho(y),$$
$$\rho(y) \leq d(y, x) + d(x, f(x)) + d(f(x), f(y)) \leq 2d(x, y) + \rho(x).$$

従って $|\rho(x) - \rho(y)| \leq d(x, y)$ となる．

(2)　(1) より $\rho$ は連続．$X$ はコンパクトだから $\rho$ は最小値 $\rho(x^*)$　$(x^* \in X)$ を持つ．$\rho(x^*) > 0$ ならば，仮定より $\rho(f(x^*)) < \rho(x^*)$ となり最小性に反する．故に $d(x^*, f(x^*)) = 0$ となる．次に $y \in X$　$(x^* \neq y)$ も $\rho(y) = 0$ だとすると $d(x^*, y) = d(f(x^*), f(y)) < d(x^*, y)$ となり矛盾する．

(3)　$\rho(x_{n+1}) = d(f(x_n), f^2(x_n)) < \rho(x_n)$ より，$\{\rho(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ は単調減少する非負数列，従って或る非負実数 $\delta$ に収束する．一方，$X$ はコンパクトだから点列 $\{x_n\}$ の収束部分列 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ が存在．極限を $z$ とする．$f$ の連続性と定義より $\{x_{n_k+1}\}$ は $f(z)$ に収束．

$$\delta = \lim_{k\to\infty} \rho(x_{n_k}) = \rho(z), \quad かつ \quad \delta = \lim_{k\to\infty} \rho(x_{n_k+1}) = \rho(f(z)),$$

特に $\rho(f(z)) = \rho(z)$ となる．$f(z) \neq z$ だとすると $\rho(f(z)) = d(f(z), f^2(z)) < d(z, f(z)) = \rho(z)$ となり矛盾．故に $f(z) = z$，即ち $z = x^*$ となる．更に $n_k \leq n$ となる $n_k, n \in \mathbb{N}$ に対し

$$d(x_n, x^*) = d(f^{n-n_k}(x_{n_k}), f^{n-n_k}(x^*)) < d(x_{n_k}, x^*)$$

となる事から $\lim_n x_n = x^*$ である事が分かる．□