§ 26　距離空間の完備性

p. 140　問 26. 1　距離空間 (X, d) の点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ について，任意の正数 ε に対して，或る自然数 N を選んで，$m \geq N$ かつ $n \geq N$ ならば $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ となるようにできる事と，$\{x_n\}$ が基本列である事とは同値である事を確かめよ．

解答　問題の条件が成立しているならば基本列である事は自明．逆に $\{x_n\}$ が基本列であるとき，$\varepsilon > 0$ に対し $d(x_n, x) < \varepsilon/2$ $(n \geq N)$ となる N が存在．このとき $m, n \geq N$ ならば $d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_N) + d(x_N, x_n) < \varepsilon$ となる．□

p. 141　問 26. 2(改題)　n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ の基本列 $\{x^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$　$(x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)}))$ の各成分からなる数列 $\{x_i^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ は $\mathbb{R}$ の基本列となる事を確かめよ．またその極限を a_i とするとき，点 $a = (a_1, \cdots, a_n)$ が基本列 $\{x^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ の極限点である事を確かめよ．

解答　$|x_i^{(k)} - x_i^{(l)}| \leq \|x^{(k)} - x^{(l)}\|$ より $\{x_i^{(k)}\}$ は基本列となる事が分かる．a について $\|a - x^{(k)}\| \leq \sum_{i=1}^n |a_i - x_i^{(k)}|$ より a は $\{x^{(k)}\}$ の極限となる事が分かる．□

p. 141　問 26. 3　Hilbert 空間 (l^2, d_∞) も完備距離空間である事を示せ．

解答　$\{x^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$　$(x^{(k)} = \{x_n^{(k)}\}_n)$ を l^2 の基本列とする．前問と同様にすれば $a_m = \lim_{k\to\infty} x_m^{(k)}$ が存在する．
(i)　仮定より $d(x^{(k)}, x^{(N)}) < 1$　$(k \geq N)$ となる N が存在．任意の n に対し

$$\sqrt{\sum_{m=0}^{n} |x_m^{(k)}|^2} \leq d(x^{(k)}, 0) \leq d(x^{(k)}, x^{(N)}) + d(x^{(N)}, 0) < 1 + d(x^{(N)}, 0)$$

が成立．$k \to \infty$ とすれば $\sqrt{\sum_{m=0}^{n} |a_m|^2} \leq 1 + d(x^{(N)}, 0)$．$n$ は任意だから $a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$ となる．また任意の $\varepsilon > 0$ に対し $d(x^{(k)}, x^{(l)}) < \varepsilon/2$　$(k, l \geq N)$ となる N をとる．このとき任意の n について

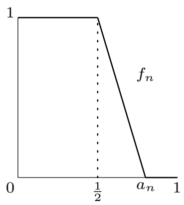
$$\sqrt{\sum_{m=0}^{n} |x_m^{(k)} - x_m^{(l)}|^2} \leq d(x^{(k)}, x^{(k)}) < \varepsilon/2$$

が成立．ここで $l \to \infty$ とすれば $\sum_{m=0}^{n} |x_m^{(k)} - a_m|^2 \leq \varepsilon/2$．$n$ は任意だから $\sum_{m=0}^{\infty} |x_m^{(k)} - a_m|^2 \leq \varepsilon/2$，従って $d(x^{(k)}, a) < \varepsilon$　$(k \geq N)$ となる．□

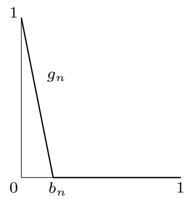
p. 142　問 26. 4　$C[0, 1]$ の 2 元 f, g に対して

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

と定義すれば d_1 も集合 $C[0, 1]$ 上の距離関数である．$C[0, 1]$ の元 f_n, g_n を下図のグラフによって定義する：



$(a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}})$



$(b_n = \frac{1}{2^n})$

距離空間 $(C[0,1], d_1)$ に於いて
(1) 点列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は共に基本列である事を示せ.
(2) この 2 つの点列 $C[0,1]$ の点に収束するか.

解答 (1) $m \leq n$ として $d_1(f_n, f_m)$, $d_1(g_n, g_m) = \dfrac{1}{2^{m+2}} - \dfrac{1}{2^{n+2}} < \dfrac{1}{2^{m+2}} \to 0$ より $\{f_n\}, \{g_n\}$ は基本列である.

(2) 後者は $d_1(g_n, 0) = \displaystyle\int_0^1 |g_n(x)|dx = \dfrac{1}{2^{n+1}}$ より連続関数 0 に収束. 一方, 前者が仮に $C[0,1]$ の元 f に収束したとすると

$$\int_0^{1/2} |f(x) - f_n(x)|dx,\ \int_{1/2}^1 |f(x) - f_n(x)|dx \leq d_1(f, f_n) \ \to\ 0 \quad (n \to \infty)$$

及び $f - f_n$ の連続性より $f(x) = 1 \ \ (x \in [0, 1/2))$, $f(x) = 0 \ \ (x \in (1/2, 1])$ となるが, $x = 1/2$ で f は不連続となり矛盾.
よって $\{f_n\}$ は $C[0,1]$ の点に収束しない. □

p. 142 問 26. 5 (X, d) を距離空間, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を X の点列とする. 写像 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が与えられたとき, $y_n = x_{f(n)}$ $(n \in \mathbb{N})$ と置けば X の点列 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が定まる. 特に f が順序を保つ単射であるとき, 点列 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を元の点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の**部分列** (subsequence) という. $\{x_n\}$ が基本列であり, その或る部分列が X の点 x に収束すれば, 元の点列 $\{x_n\}$ も点 x に収束する事を示せ.

解答 $\{x_n\}$ の部分列 $\{y_n\}$ $(y_n = x_{f(n)})$ が x に収束したとする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, 仮定より

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon/3 \ (m, n \geq N_1), \quad d(y_n, x) < \varepsilon/3 \ (n \geq N_2), \quad N_2 > N_1$$

とする. $n \geq N_2$ のとき, $f(N_2) \geq N_2 > N_1$ となる事に注意すれば

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{N_1}) + d(x_{N_1}, x_{f(N_2)}) + d(y_{N_2}, x) < 3 \times (\varepsilon/3) = \varepsilon.$$

故に $\lim x_n = x$ となる. □