§ 25　連結性

p. 126　問 25. 1　位相空間 $(X, \mathfrak{O})$ 及び X の部分集合 A について，A が $(X, \mathfrak{O})$ の連結集合である事と，次の条件が成り立つ事は同値である事を示せ：

$\mathfrak{O}$ の元 U, V について

$$U \cap A \neq \varnothing, \qquad V \cap A \neq \varnothing, \qquad A \subset U \cap V$$

が成り立てば $U \cap V \cap A \neq \varnothing$ が成り立つ．

解答　A が連結だとする．開集合 U, V について $U \cap A \neq \varnothing$，$V \cap A \neq \varnothing$ かつ $A \subset U \cap V$ であるとする．$U \cap V \cap A = \varnothing$ だとすると，$A - V \cap A = U \cap A$ だから部分空間 A の開集合 $U \cap A$ は閉集合でもある．これは A は開集合かつ閉集合となる真部分集合が存在しないという仮定に反する．

逆に上の命題が成立したとする．仮に A の開である真部分集合 O が存在したとする．O に対し $O = U \cap A, O^c = V \cap A$ となる X の開集合 U, V が存在．$O, O^c \neq \varnothing$ であり，$A = (U \cap A) \cup (V \cap A) \subset U \cup V$ が成立．しかし $U \cap V \cap A = O \cap O^c = \varnothing$ となり，仮定に反する．　□

p. 128　問 25. 2　$(X, \mathfrak{O})$ を位相空間とし，$\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を集合 X の部分集合系とする．全ての $\lambda \in \Lambda$ について M_λ は連結集合であり，更に Λ の任意の 2 元 α, β に対して Λ の有限個の元 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ を選んで

$$M_{\lambda_i} \cap M_{\lambda_{i+1}} \neq \varnothing \ (i = 1, 2, \cdots, n-1), \qquad M_\alpha \cap M_{\lambda_1} \neq \varnothing, \qquad M_\beta \cap M_{\lambda_n} \neq \varnothing$$

が成り立つように出来るならば，和集合 $M = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ は連結集合である事を示せ．

解答　$M = (M \cap U) \cup (M \cap V)$ かつ $M \cap U, M \cap V \neq \varnothing$ だとする．仮定より

$$U \cap M_{\lambda_1} \neq \varnothing, \quad M_{\lambda_i} \cap M_{\lambda_{i+1}} \neq \varnothing, \ (i = 1, \cdots, m-1), \quad V \cap M_{\lambda_m} \neq \varnothing$$

となる $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \Lambda$ が存在する．[Uchida] §25 定理 25.3 を繰り返し適用すれば $S = M_{\lambda_1} \cup \cdots \cup M_{\lambda_m}$ は連結となる．S について $S \subset U \cup V$ かつ $M_{\lambda_1} \cap U \subset S \cap U$，$M_{\lambda_m} \cap V \subset S \cap V$，従って $S \cap U, S \cap V \neq \varnothing$ となるから，問題 25.1 より $M \cap U \cap V \subset S \cap U \cap V \neq \varnothing$ となるから，再び問題 25.1 より M は連結となる．　□

p. 131　問 25. 3　$\mathbb{R}$ の通常の位相に関して，部分空間 $[a, b]$，$[a, b)$，(a, b) は互いに同相ではない事を示せ．

解答　$\mathbb{R}$ の部分集合 A 上の実数値連続関数の全体を $C(A)$ と記す．　同相写像 $\phi : [a, b] \to [a, b)$ が存在したとすると任意の $f \in C([a, b))$ に対し $f \cdot \phi \in C([a, b])$ となる．コンパクト集合上の連続関数は有界だから，$f \cdot \phi$ は有界となるが，例えば $f = 1/(b - x)$ とすると $f \cdot \phi$ は有界ではなくなり矛盾．よって $[a, b]$ と $[a, b)$ は同相ではない．$[a, b]$，(a, b) についても同様．

次に同相写像 $\psi : [a, b) \to (a, b)$ が存在したとし，$a < \psi(a) = c < b$ と置く．このとき ψ は連結集合 (a, b) から非連結集合 $(a, c) \cup (c, b)$ への同相写像を誘導するが，これは連結集合の連続写像による像が再び連結写像となる事に反する．故に $[a, b)$ から (a, b) への同相写像は存在しない．　□

p. 133　問 25. 4　$\mathbb{R}^2$ に於いて高々可算集合の補集合は通常位相に関して $\mathbb{R}^2$ の連結集合である事を示せ．

解答　A を高々可算個の部分集合とする．$x, y \in A^c$　$(x \neq y)$ に対し，線分 $\overline{xy}$ の垂直 2 等分線を ℓ とする．x と $p \in A$ とを結ぶ直線と ℓ との交点の全体を B，y と $p \in A$ とを結ぶ直線と ℓ との交点の全体を C とする．B, C は ℓ の高々可算な部分集合だから $\ell - B$，$\ell - C$ は連続濃度を持つ．$(\ell - B) \cap (\ell - C) = \varnothing$ だとすると $\ell - B \subset C$，従って $\aleph \leq \aleph_0$ となり矛盾．故に $p \in (\ell - B) \cap (\ell - C)$ が存在．$\overline{xp} \cap A$，$\overline{yp} \cap A = \varnothing$ だから $\overline{xp}$ と $\overline{py}$ を繋げれば x, y は A^c 内の弧で結ばれる．故に A^c は連結となる．　□

p. 133　問 25．5　Cantor 集合は通常位相に関する $\mathbb{R}$ の部分空間として完全不連結である事を示せ．

解答　C を Cantor 集合 $\Phi(2^\omega)$ の x を含む連結集合とする．$x<y$ となる $y\in C$ が存在したとすると $x<\frac{k}{3^n}<y$ となる自然数 n,k が存在．このとき

$$C=C\cap(-\infty,\frac{k}{3^n})\amalg C\cap(\frac{k}{3^n},\infty),\qquad C\cap(-\infty,\frac{k}{3^n}),\ C\cap(\frac{k}{3^n},\infty)=\varnothing$$

となり，C が連結である事に反する．$y<x$ となる $y\in C$ が存在しても同様．故に $C=\{x\}$ となる．　□

p. 133　問 25．6　上限位相を持った位相空間 $\mathbb{R}$ について連結集合はどのようなものになるか．

解答　$A\subset\mathbb{R}$ が連結だとする．$x,y\in A$ $(x<y)$ だとすると $A=(-\infty,x]\cap A\amalg(x,\infty)\cap A$, $x\in(-\infty,x]\cap A$, $y\in(x,\infty)\cap A$ となり A が連結である事に反する．故にこの空間の連結集合は常に 1 点集合である．　□

p. 135　問 25．7　位相空間 $(X,\mathfrak{O})$ について，弧状連結である事と X の 1 点 a と X の任意の点が弧によって結ぶ事が出来る事は同値である事を示せ．

解答　X が弧状連結な場合，点 a と任意の点が弧によって結ばれる事は自明．逆に点 a と任意の点が弧によって結ばれるとすると，任意の 2 点 x,y について x と a，a と y を結ぶ弧を繋げれば (a を経由して)x と y を結ぶ弧が存在する．従って X は弧状連結である．　□

p. 136　問 25．8　$\mathbb{R}^n$ の開集合 G について

(i)　部分空間 G に於いて点 $a\in G$ と弧によって結ぶ事が出来る G の点の全体を $G(a)$ とすれば $G(a)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である事を示せ．

(ii)　開集合 G が連結ならば G は弧状連結である事を示せ．

解答　(i)　$x\in G(a)$ とする．x に対し $U_\varepsilon(x)\subset G$ となる $\varepsilon>0$ をとる．$U_\varepsilon(x)$ の任意の点 y に対し $|(x+t(y-x))-x|\leq t\varepsilon$ $(0\leq t\leq 1)$ より $x+t(y-x)\in U_\varepsilon(x)\subset G$ となる．故に y は x と G 内の曲線 (今の場合，線分) で結ばれる．a と x を結ぶ G 内の曲線と上の曲線を繋げれば a と y は G 内の曲線で結ばれる．よって $U_\varepsilon(x)\subset G(a)$，即ち x は $G(a)$ の内点となる．従って $G(a)$ は開集合である．
(ii)　G が弧状連結ではないと仮定する．このとき $G(a)\subsetneq G$ となる $a\in G$ がとれる．$G'=G-G(a)$ と置く．任意の $x\in G'$ に対し $G(x)\cap G(a)=\varnothing$ であり，かつ $G(x)$ は開集合だから x は G' の内点，従って G' は開集合となる．更に $G=G(a)\cap G'$，$G(a),G'\neq\varnothing$ が成立．よって G は $\varnothing$ ではなく，共通部分を持たない 2 つの開集合の和となるが，これは G が連結であるという仮定に反する．故に G は弧状連結である．　□