

§ 22 コンパクト性

**p. 108 問 22. 1**  $(X, \mathcal{O})$  を位相空間とし,  $A$  を  $X$  の部分集合,  $\mathcal{O}_A$  を  $A$  上の相対位相とする.  $A$  が位相空間  $(X, \mathcal{O})$  の部分集合としてコンパクトである必要十分条件は部分空間  $(A, \mathcal{O}_A)$  がコンパクトである事を示せ.

**解答**  $A$  が  $X$  の部分集合としてコンパクトだとする.  $\{O_\lambda \cap A\}_{\lambda \in \Lambda}$  を部分空間  $(A, \mathcal{O}_A)$  の開被覆だとすると  $A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$  だから  $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  は  $A$  の開被覆となる. 仮定より  $A \subset \bigcup_{i=1}^m O_{\lambda_i}$  となる有限個の元  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \Lambda$  が存在し,  $A = \bigcup_{i=1}^m O_{\lambda_i} \cap A$  となる. 故に  $(A, \mathcal{O}_A)$  はコンパクトである.

逆に  $(A, \mathcal{O}_A)$  がコンパクトだとする.  $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  を  $X$  に於ける  $A$  の開被覆だとすると  $\{O_\lambda \cap A\}_{\lambda \in \Lambda}$  は  $(A, \mathcal{O}_A)$  の開被覆となる. 仮定より  $A = \bigcup_{i=1}^m O_{\lambda_i} \cap A$  となる有限個の  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \Lambda$  が存在.  $A \subset \bigcup_{i=1}^m O_{\lambda_i}$  となる. 故に  $A$  は  $X$  の部分集合としてコンパクトとなる.  $\square$

**p. 111 問 22. 2** 通常位相を持った  $\mathbb{R}$  の部分空間として, 开区間  $(a, b)$  と閉区間  $[a, b]$  とは同相ではない事を示せ ( $-\infty < a \leq b < \infty$  とする).

**解答**  $[a, b]$  は有界閉集合だからコンパクト. 一方,  $(a, b)$  は閉集合ではないから, コンパクトではない. 一般にコンパクト集合の連続写像による像は再びコンパクトであるから,  $[a, b]$  と  $(a, b)$  は同相ではない.  $\square$

**p. 111 問 22. 3**  $(X, d)$  を距離空間とし,  $d$  から定まる距離位相を  $\mathcal{O}_d$  とする. 位相空間  $(X, \mathcal{O}_d)$  に於いて  $A$  をコンパクト集合,  $B$  を閉集合とし, 互いに交わらないものとすれば  $d(A, B) > 0$  となる事を示せ.

**解答** 定理 13.3 (2) (p.61) より  $d(x, B) > 0$  が成立.  $y \in U_{d(x, B)/2}(x)$  について

$$d(b, x) < d(b, y) + d(y, x) < d(b, y) + d(x, B)/2, \quad d(y, b) > d(x, B) - d(x, B)/2 = d(x, B)/2 \quad (\forall b \in B)$$

より  $d(y, B) \geq d(x, B)/2 > 0$  となる.  $A$  の開被覆  $\{U_{d(x, B)/2}(x)\}_{x \in A}$  に対し有限部分被覆  $\{U_{d(x_i, B)/2}(x_i)\}_{i=1}^n$  をとり  $\varepsilon = \min\{d(x_1, B)/2, \dots, d(x_n, B)/2\}$  と置く. 任意の  $x \in A$  に対し  $x \in U_{d(x_i, B)/2}(x_i)$  となる  $i$  をとれば  $d(b, x) > d(b, x_i) - d(x, x_i) > d(B, x_i)/2 > \varepsilon$  ( $b \in B$ ) より  $d(x, B) \geq \varepsilon$ . 従って  $d(A, B) \geq \varepsilon > 0$  となる.  $\square$

**別解**  $f: A \rightarrow \mathbb{R}, f(a) := d(a, B)$  と置く. 定理 13.3 (1) より  $f$  は連続関数.  $A$  はコンパクトだから定理 22.3 系より  $f$  は最小値を持つ. これを  $f(a_0)$  とすると  $a_0 \notin B^c = B$  と定理 13.3 (2) より  $f(a_0) = d(a_0, B) > 0$ . 従って  $d(A, B) \geq d(a_0, B) > 0$  となる.  $\square$