§ 21　分離公理

p. 100　問 21．1　Hausdorff 空間の一点集合は常に閉集合であり，従って正規 Hausdorff 空間は正則空間である事を示せ．

解答　X を Hausdorff 空間，$A = \{x\}$ を X の 1 点集合とする．$y \in A^c$ のとき，仮定より $x \in U$，$y \in V$ かつ $U \cap V = \varnothing$ となる開集合 U, V が存在．特に $V \subset A^c$，従って y は A^c の内点となる．故に A^c は開集合，即ち A は閉集合となる．　□

p. 101　問 21．2　距離位相は常に Hausdorff の分離公理を満たし，かつ正規である事を示せ．

解答　(X, d) を距離空間とする．$x, y \in X$ に対し $x \neq y$ だとすると $d(x, y) > 0$ だから，$0 < \varepsilon < d(x, y)/2$ となる ε をとれば $U_\varepsilon(x) \cap U_\varepsilon(y) = \varnothing$ となる．故に X は Hausdorff 空間となる．またこれと問 14.4 (p.66) より X は正規である．　□

p. 103　問 21．3　f, g を位相空間 $(X, \mathfrak{O})$ から Hausdorff 空間 $(X', \mathfrak{O}')$ への連続写像とすれば，$\Lambda = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ は X の閉集合である事を示せ．

解答　$x \in \Lambda^c$ とすると $f(x) \neq g(x)$ だから，仮定より $f(x) \in U$, $g(x) \in V$ かつ $U \cap V = \varnothing$ となる開集合 $U, V \in \mathfrak{O}'$ が存在する．$x \in W \subset f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ となる開集合 $W \in \mathfrak{O}$ をとるとき，$f(W) \subset U$，$g(W) \subset V$ より $f(W) \cap g(W) = \varnothing$，従って $W \subset \Lambda^c$ となり, x は L^c の内点となる．よって Λ^c は開集合，Λ は閉集合である．　□

p. 103　問 21．4　位相空間 $(X, \mathfrak{O})$ に於いて一点集合が常に閉集合であるとき，$(X, \mathfrak{O})$ は $\mathbf{T}_1$ **空間**であるといい，$\mathfrak{O}$ は $\mathbf{T}_1$ **位相**であるという．有限集合の上の T_1 位相は常に離散位相である事を示せ．更に自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ について，空集合，及び有限集合の補集合の全体を $\mathfrak{O}$ とすれば，$\mathfrak{O}$ は $\mathbb{N}$ 上の位相であり，T_1 位相であるが，Hausdorff の分離公理を満たしていない事を示せ．

解答 (前半)　X が有限集合ならば，任意の部分集合は有限個の閉集合の合併，従って閉集合となる．よって $\mathfrak{O}$ は離散位相である．

(後半)　$\mathfrak{O}$ が位相である事：

- (O1)　定義より $\varnothing, \mathbb{N} \in \mathfrak{O}$ は自明.
- (O2)　$O_1, O_2 \in \mathfrak{O}$ とする．$\varnothing \in \{O_1, O_2\}$ のとき $(O_1 \cap O_2)^c = O_1^c \cup O_2^c = \mathbb{N} \in \mathfrak{O}$．$\varnothing \notin \{O_1, O_2\}$ のとき $(O_1 \cap O_2)^c = O_1^c \cup O_2^c$ は有限集合だから，$O_1 \cap O_2 \in \mathfrak{O}$.
- (O3)　$O_\lambda \in \mathfrak{O}$　$(\lambda \in \Lambda)$，$O = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ と置く．$O = \varnothing$ ならば $O \in \mathfrak{O}$．また $O \neq \varnothing$ のとき，$O_{\lambda_0} \neq \varnothing$ となる $\lambda \in \Lambda$ を一つ固定．$O^c = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda^c \subset O_{\lambda_0}^c$ より $\sharp O^c < \infty$，従って $O \in \mathfrak{O}$ となる．

以上より $\mathfrak{O}$ が $\mathbb{N}$ 上の位相構造となる事が確かめられた.

T_1 位相である事：定義より 1 点集合の補集合は開集合だから，1 点集合は閉集合，従って T_1 位相となる.

Hausdorff 空間ではない事：$x, y \in \mathbb{N}$　$(x \neq y)$ に対し $x \in U$，$y \in V$ となる開集合 U, V について，$U \cap V = \varnothing$，即ち $U \subset V^c$ だとすると $\sharp U = \infty$，$\sharp V^c < \infty$ に反する．故に $U \cap V \neq \varnothing$ となるから X は Hausdorff 空間ではない.　□

p. 103　問 21．5　集合 $X = \{1, 2, 3\}$ 上の位相で，次の条件を満たすものを全て求めよ．

(i)　正規かつ正則であるが T_1 位相ではないもの.

(ii)　正規であるが正則ではなく，かつ T_1 位相ではないもの.

解答　問 15.1 の解答下の注意ので与えた位相同型類の代表 $\mathfrak{O}_{\mathrm{triv.}}$，$\mathfrak{O}_1$，$\mathfrak{O}_4$，$\mathfrak{O}_7$，$\mathfrak{O}_{13}$，$\mathfrak{O}_{16}$，$\mathfrak{O}_{19}$，$\mathfrak{O}_{22}$ 及び $\mathfrak{O}_d$ のそれぞれの閉集合系について考察すれば次の事が分かる.

- 離散位相以外は全て T_1 位相ではない.

- $\mathfrak{O}_{\mathrm{triv.}}$, $\mathfrak{O}_{13}$, $\mathfrak{O}_d$ は正則かつ正規.
- $\mathfrak{O}_{16}$ は正則，正規のどちらでもない.
- $\mathfrak{O}_{\mathrm{triv.}}$, $\mathfrak{O}_{13}$, $\mathfrak{O}_{16}$ 及び $\mathfrak{O}_d$ 以外は正則ではないが，正規である.

□

p. 103　問 21．6　有限集合上の正則な位相について，閉集合は同時に開集合であり，従って有限正則空間は常に正規空間である事を示せ.

解答　X を $\sharp X < \infty$ となる正則空間，F をその閉集合とする．F を含む開集合の全体を $\mathfrak{O}(F)$ $(\neq \varnothing)$ とする．$F \subset \bigcap_{O\in\mathfrak{O}(F)} O^a$ となる事は自明．仮に $x \in \bigcap_{O\in\mathfrak{O}(F)} O^a - F$ だとする．X は正則空間だから $x \in U$, $F \subset O$ かつ $U \cap O = \varnothing$ となる開集合 U, O が存在するが，仮定より $x \in O^a$，従って $U \cap O \neq \varnothing$ となり矛盾．従って $F = \bigcap \mathfrak{O}(F) = \bigcap_{O\in\mathfrak{O}(F)} O^a$ となる．X は有限集合だから $\bigcap \mathfrak{O}(F)$ は開集合．従って F は開集合となる．後半の主張は自明．□

p. 107　問 21．7　第 2 可算公理を満たす正則空間は正規空間である事を次の順序で証明せよ.

(i)　A, B を互いに交わらない閉集合とすれば開集合系 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，$\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ で，$A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$，$B \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$ であり，更に $U_n^a \cap B = \varnothing$，$V_n^a \cap A = \varnothing$　$(n \in \mathbb{N})$ となるものが存在する.

(ii)　各 $n \in \mathbb{N}$ に対し U'_n, V'_n を帰納的に

$$U'_0 = U_0, \quad V'_0 = V_0 \cap U_1^{ac}, \qquad U'_n = U_n - \bigcup_{k=0}^{n-1} (V'_k)^a, \quad V'_n = V_n - \bigcup_{k=0}^{n} (U'_k)^a$$

と定め，更に $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U'_n$，$V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V'_n$ と置く．このとき U と V は互いに交わらない開集合であり，$A \subset U$，$B \subset V$ となる.

解答　(i)　$\mathfrak{B}$ を高々可算個から成る開基底とする．$x \in A$ とする．$x \in B^c$ と正則性より $x \in O_x \Subset B^c$ となる開集合 O_x が存在．更に $x \in U_x \subset O_x$ となる $U_x \in \mathfrak{B}$ をとる．$U_x^a \subset O_x^a \subset B^c$，従って $U_x^a \cap B = \varnothing$ となる．A の開被覆 $\{O_x\}_{x\in A}$ は高々可算個から成るので，$\mathbb{N}$ により $\{O_x\}_{x\in A} = \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と添字付けする．同様に可算個から成り，かつ $V_n^a \cap A = \varnothing$ となる B の開被覆 $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ がとれる.
(ii)　U, V が開集合である事は自明．$(V'_n)^a \subset V_n^a$ より $A \subset V_n^{ac} \subset (V'_n)^{ac}$ となるから，

$$A \cap U'_n = U_n \cap \bigcap_{k=0}^{n-1} A \cap (V'_n)^{ac} = U_n \cap A.$$

$$\therefore \quad A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A \cap U_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A \cap U'_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U'_n = U.$$

同様に $B \subset V$ となる．$m \leq n$ のとき

$$U'_m \cap V'_n = U'_m \cap V_n \cap \bigcap_{k\leq n} (U'_k)^{ac} \subset U'_m \cap V_n \cap \bigcap_{k\leq n} (U'_k)^c = \varnothing.$$

$m > n$ のとき,

$$U'_m \cap V'_n = U_m \cap \bigcap_{k<n} (V'_k)^{ac} \cap V'_n \subset U_m \cap \bigcap_{k<n} (V'_k)^c \cap V'_n = \varnothing.$$

よって任意の m, n に対し $U'_m \cap V'_n = \varnothing$ だから, $U \cap V = \bigcup_{m,n\in\mathbb{N}} U'_m \cap V'_n = \varnothing$ となる.　□

p. 107　問 21．8　自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ に，問 21.4 で定義した位相を与えておく．自然数列 $\mathscr{S} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $x_n \geq n$ $(n \in \mathbb{N})$ を満たすとすれば，$\mathscr{S}$ は位相空間 $(\mathbb{N}, \mathfrak{O})$ の全ての点に収束する事を示せ．更に Hausdorff 空間に於いては収束する点列の極限点は 1 点のみである事を示せ.

解答（前半）$x \in \mathbb{N}$ 及び $x \in O$ となる開集合をとる．$\sharp O^c < \infty$ より $\max O^c$ が存在．$n \geq \max O^c$ ならば $x_n \in O$ となるから，$\mathscr{S}$ は x に収束する．
(後半) X を Hausdorff 空間，$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を X の収束点列，x, y を $\{x_n\}$ の極限とする．$x \neq y$ だとすると $x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \varnothing$ となる開集合 U, V が存在．仮定より $x_n \in U \cap V$ $(n \geq N)$ となる $N \in \mathbb{N}$ が存在するが，これは $U \cap V = \varnothing$ に反する．故に $x = y$ である．$\square$