§ 19　積空間

p. 91 問 19. 1 $(X_1, d_1), \cdots, (X_n, d_n)$ を距離空間とする．直積 $X_1 \times \cdots \times X_n$ の 2 元 $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, \cdots, y_n)$ に対して

$$d(x, y) = \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + \cdots + d_n(x_n, y_n)^2}$$

と定義すれば，d は $X_1 \times \cdots \times X_n$ 上の距離関数となる事を示せ．更に d_i から定まる X_i 上の距離位相を $\mathscr{O}_i$ とすれば，$X_1 \times \cdots \times X_n$ 上の積位相 $\mathscr{O}_1 \times \cdots \times \mathscr{O}_n$ は d により定義される距離位相と一致する事を示せ.

解答 $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ と置く.

(D1) $d(x, y) \geq 0$ 及び $d(x, x) = 0$ は自明．$d(x, y) = 0$ のとき，$d_i(x_i, y_i) = 0$ $(i = 1, \cdots, n)$，従って $x_i = y_i$ $(i = 1, \cdots, n)$，$x = y$ となる.
(D2) $d(x, y) = d(y, x)$ も自明.
(D3) $x, y, z \in X$ について $\mathbb{R}^n$ 上の標準ノルムに関する三角不等式より

$$d(x, y) \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(d_i(x_i, z_i)^2 + d_i(z_i, y_i)^2)} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(d_i(x_i, z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i(z_i, y_i)^2)} = d(x, z) + d(z, y).$$

従って d は X 上の距離関数となる．次に位相が一致する事を示す．それには $\varepsilon > 0$，$x = (x_1, \cdots, x_n)$ $(x_i \in X_i)$ に対し

$$U_\delta^{d_1}(x_1) \times \cdots \times U_\delta^{d_n}(x_n) \subset U_\varepsilon^d(x), \tag{19.1}$$

$$U_\delta^d(x) \subset U_\varepsilon^{d_1}(x_1) \times \cdots \times U_\varepsilon^{d_n}(x_n) \tag{19.2}$$

となる $\delta > 0$ が存在する事を示せばよい．$y = (y_1, \cdots, y_n)$ $(y_i \in X_i)$ に対し $d_i(x_i, y_i) < \varepsilon/n$ だとすると

$$d(x, y) \leq \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i) < n\frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon$$

となるから (19.1) が成立．一方，y に対し $d(x, y) < \varepsilon$ だとすると $d_i(x_i, y_i) \leq d(x, y) < \varepsilon$ だから (19.2) が成立する．　□

p. 92 問 19. 2 位相空間 $(X_1, \mathscr{O}_1), (X_2, \mathscr{O}_2)$ 及び積空間 $(X_1, \mathscr{O}_1) \times (X_2, \mathscr{O}_2)$ に於いて，$A_1 \subset X_2$，$A_2 \subset X_2$ に対し次の等式が成立する事を示せ：
(i) $(A_1 \times A_2)^a = A_1^a \times A_2^a$.
(ii) $(A_1 \times A_2)^i = A_1^i \times A_2^i$.

松坂 第 4 章 §5 問題 11, 12 参照.　□

p. 92 問 19. 3 $(X, \mathscr{O})$ を位相空間とし，$\Delta : X \to X \times X$ を対角線写像，即ち $\Delta(x) = (x, x)$ $(x \in X)$ とする．Δ は $(X, \mathscr{O})$ から積空間 $(X, \mathscr{O}) \times (X, \mathscr{O})$ への連続写像である事を示せ.

解答 $\Delta(x)$ の近傍 O に対し $\Delta(x) \in U \times V \subset O$ となる X の開集合 U, V がとれる．$W = U \cap V$ とすれば W は x の開近傍であり，$\Delta(W) \subset U \times V \subset O$ となる．故に Δ は連続である.　□

p. 92 問 19. 4 $\mathbb{R}^n$ の 2 元 $x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n)$ に対し

$$x + y = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n$$

とし，$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を $f(x,y) = x+y$ により定義する．$\mathbb{R}^n$ の通常位相を $\mathscr{O}$ とするとき，f は積空間 $(\mathbb{R}^n, \mathscr{O}) \times (\mathbb{R}^n, \mathscr{O})$ から $(\mathbb{R}^n, \mathscr{O})$ への連続写像である事を示せ．

解答 $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 及び任意の正数 ε に対して $f(U_{\varepsilon/2}(x) \times U_{\varepsilon/2}(y)) \subset U_\varepsilon(x+y)$ となる事が容易に確かめられ，故に f は連続である． □

p. 92　問 19．5 (X,d) を距離空間とし，d から定まる X の距離位相を $\mathscr{O}$ とする． 距離 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ は積空間 $(X,\mathscr{O}) \times (X,\mathscr{O})$ から通常位相を導入した $\mathbb{R}$ への連続写像である事を示せ．

解答 三角不等式より $|d(x',y')-d(x,y)| \le d(x,x')+d(y,y')$ となるから，任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対し $d(U^d_{\varepsilon/2}(x) \times U^d_{\varepsilon/2}(x)) \subset U_\varepsilon(d(x,y))$ が成立． 従って d は連続写像である． □

p. 95　問 19．6 位相空間系 $\{(X_\lambda, \mathscr{O}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ 及び $A_\lambda \subset X_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ に対して各因子空間 $(X_\lambda, \mathscr{O}_\lambda)$ に於ける A_λ の閉包 A^a_λ $(\lambda \in \Lambda)$ の直積 $\prod_{\lambda\in\Lambda} A^a_\lambda$ は，積空間 $\prod_{\lambda\in\Lambda}(X_\lambda, \mathscr{O}_\lambda)$ に於ける $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ の閉包 $(\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)^a$ と一致する事を示せ．また内核作用素について同様の事が言えるか．

松坂 第 4 章 §5 問題 11, 12 参照． □

p. 96　問 19．7 可算個の距離空間 $\{(X_n, d_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられ，$\mathscr{O}_n$ を d_n から定まる X_n 上の距離位相とする． このとき積空間 $\prod_{n\in\mathbb{N}}(X_n, \mathscr{O}_n)$ は距離化可能である事を示せ．

解答 $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ とし，$x = (x_n)$，$y = (y_n) \in X$ に対し

$$d(x,y) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n,y_n)}{1+d_n(x_n,y_n)}$$

とする．

- 各 n に対し $0 \le d_n(x_n,y_n)/(1+d_n(x_n,y_n)) < 1$ だから $d(x,y) \le 2 < \infty$ となり，$d(x,y)$ は常に収束する．

(D1) $d(x,y) \ge 0$ は自明．

$$d((x_n),(y_n)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d_n(x_n,y_n)}{1+d_n(x_n,y_n)} = 0 \ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad \Leftrightarrow \quad x_n = y_n \ (\forall n \in \mathbb{N})$$

より $d(x,y) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = y$ となる．

(D2) $d(x,y) = d(y,x)$ は自明．

(D3) $x,y,z \in X$ とする．[内田] 問題 13.9 より各 $d_n(x_n,y_n)/(1+d_n(x_n,y_n))$ は距離関数となる事に注意すれば

$$d(x,y) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \left(\frac{d_n(x_n,z_n)}{1+d_n(x_n,z_n)} + \frac{d_n(z_n,y_n)}{1+d_n(z_n,y_n)} \right) = d(x,z) + d(z,y).$$

従って d について三角不等式が成立する．

以上より d は X 上の距離関数である事が確かめられた． 次に d より導かれる距離位相と積位相が一致する事を確かめる．$x = (x_n)$ を X の点とする．

$$U^{d_0}_{\varepsilon_0}(x_0) \times \cdots \times U^{d_m}_{\varepsilon_m}(x_m) \times \prod_{n>m} X_n \qquad (\varepsilon_i > 0,\ m \in \mathbb{N})$$

という形の開集合の全体が積位相に関する x の基本近傍系となる事に注意する． $\varepsilon_i > 0$ $(i = 0, \cdots, m)$ に対し $0 < \varepsilon < \min\{\varepsilon_i/2^i : 0 \le i \le m\}$ となる ε をとる． $y \in U^d_\varepsilon(x)$ に対し

$$d_i(x_i,y_i) = 2^i \frac{d_i(x_i,y_i)}{2^i} < 2^i d(x,y) < 2^i(\varepsilon_i/2^i) = \varepsilon_i \qquad (0 \le i \le m)$$

となるから，

$$U_\varepsilon^d(x) \subset U_{\varepsilon_0}^{d_0}(x_0) \times \cdots \times U_{\varepsilon_m}^{d_m}(x_m) \times \prod_{n>m} X_n$$

が成立する．逆に任意の $\varepsilon > 0$ に対し $1/2^m < \varepsilon$ となる m をとるとき，$y \in U^{d_0}_{1/2^{m+2}}(x_0) \times \cdots \times U^{d_m}_{1/2^{m+2}}(x_m) \times \prod_{n>m} X_n$ に対し，

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sum_{n \le m+1} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n,y_n)}{1+d_n(x_n,y_n)} + \sum_{m+1<n} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n,y_n)}{1+d_n(x_n,y_n)} \\ &\le \sum_{n \le m+1} \frac{1}{2^n} d_n(x_n,y_n) + \sum_{m+1<n} \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{m+1}} = \frac{1}{2^m} < \varepsilon. \end{aligned}$$

故に $U^{d_0}_{1/2^{m+2}}(x_0) \times \cdots \times U^{d_m}_{1/2^{m+2}}(x_m) \times \prod_{n>m} X_n \subset U_\varepsilon^d(x)$ となる．よって距離位相と積位相は一致する． □