§ 18　点列連続性

p. 85　問 18．1　(X, d) を距離空間とし，$\mathscr{O}$ を d によって定まる距離位相とする．位相空間 $(X, \mathscr{O})$ に於いて X の点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が点 $x \in X$ に収束する事と実数列 $\{d_n(x, x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ について $\lim_{n\to\infty} d(x, x_n) = 0$ が成り立つ事とは同値である事を確めよ．

解答　x を中心とする開球の全体 $\mathscr{U}_x = \{U^d_\varepsilon(x)\}_{\varepsilon>0}$ は x に於ける基本近傍系となる事に注意すれば

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad &\Leftrightarrow \quad \text{“任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対し } x_n \in U^d_\varepsilon(x) \ \ (n \geq N) \text{ となる } N \text{ が存在''} \\ &\Leftrightarrow \quad \text{“任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対し } d(x, x_n) < \varepsilon \ \ (n \geq N) \text{ となる } N \text{ が存在''} \\ &\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} d(x, x_n) = 0.\end{aligned}$$

□

p. 86　問 18．2 (改題) 集合 X に対し $\mathscr{O}_c$ を

$$A \in \mathscr{O}_c \quad \Leftrightarrow_{\text{def}} \quad A = \varnothing \text{ または } A^c \text{ は高々可算集合}$$

とする．$\mathscr{O}_c$ は X 上の位相となる事を確めよ．

解答　$\aleph_0$ により可算濃度を表す．

$\mathbf{O}_1$　定義より $\varnothing \in \mathscr{O}_c$．また $\sharp X^c = \sharp\varnothing = 0$ より $X \in \mathscr{O}_c$ となる．
$\mathbf{O}_2$　$A_1, A_2 \in \mathscr{O}_c$ とする．$\sharp(A_1 \cup A_2)^c = \sharp(A_1^c \cup A_2^c) \leq \sharp A_1^c + \sharp A_2^c \leq \aleph_0$ より $A_1 \cap A_2 \in \mathscr{O}_c$ である．
$\mathbf{O}_3$　$A_\lambda \in \mathscr{O}_c$　$(\lambda \in \Lambda)$ とする．$\lambda_0 \in \Lambda$ を一つ固定する．このとき

$$\left(\bigcup\nolimits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcap\nolimits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c \subset A_{\lambda_0}^c$$

となるから $\sharp\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c \leq \sharp A_{\lambda_0}^c \leq \aleph_0$．したがって $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \in \mathscr{O}_c$ となる．

以上より $\mathscr{O}_c$ が開集合系の公理を満たし，よって X 上の位相を定める事が確められた．□

p. 86　問 18．3　問 18.2　で定義した位相空間 $(\mathbb{R}, \mathscr{O}_c)$ と通常位相を定義した位相空間 $(\mathbb{R}, \mathscr{O})$ は同相ではない事を示せ．

解答　$A = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ $(=$ 無理数の全体$)$ は $(\mathbb{R}, \mathscr{O})$ に於いて開集合ではない．一方，$(\mathbb{R}, \mathscr{O}_c)$ から $(\mathbb{R}, \mathscr{O})$ への任意の全単射 f について $f^{-1}(A) = \mathbb{R} - f^{-1}(\mathbb{Q})$ は可算集合の補集合だから，$f^{-1}(A)$ は $(\mathbb{R}, \mathscr{O}_c)$ に於ける開集合となるから，f の逆写像は連続になり得ない．故に $(\mathbb{R}, \mathscr{O}_c)$ から $(\mathbb{R}, \mathscr{O})$ への同相写像は存在しない．□

p. 88　問 18．4　$(X, \mathscr{O})$ を位相空間とする．X の部分集合 A と X の点 x について，$x \in A^a$ である為の必要十分条件は $(X, \mathscr{O})$ に於いて x に収束する A の有向点列が存在する事である事を証明せよ．

解答　x に収束する A の有向点列 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$　(A は順序 $\leq$ に関する有向集合) が存在したとする．x の任意の近傍 U に対し $x_\alpha \in U$　$(\alpha \geq \delta)$ となる $\delta \in A$ が存在．特に $U \cap A \neq \varnothing$ が成立．よって $x \in A^a$ である．

$x \in A^a$ とし，$\mathscr{U}_x$ を x に於ける開近傍系とする．$\mathscr{U}_x$ は包含関係に関し有向集合となる．各 $V \in \mathscr{U}_x$ に対し $x_V \in V \cap A$ をとれば, 任意の $U \in \mathscr{U}_x$ に対し，$x_W \in U$　$(\forall W \subset U)$ となるから，x に収束する有向点列 $\{x_V\}_{V\in\mathfrak{U}_x}$ が存在する．□