

§ 17 開基と基本近傍系

p. 81 問 17. 1 上限位相を持った位相空間 \mathbb{R} に於いて、左半開区間 $(a, b]$ は開集合であると同時に閉集合である事を示せ。同様に、下限位相を持った位相空間 \mathbb{R} に於いて、右半開区間 $[a, b)$ は開集合であると同時に閉集合である事を示せ。さらに上限位相 (または下限位相) を持った位相空間 \mathbb{R} に於いて開区間 (a, b) は開集合である事を示せ。

※ \mathbb{R} の部分集合族 $\mathcal{B}_u, \mathcal{B}_l$ を次で定義する：

$$\mathcal{B}_u = \{(a, b] \subset \mathbb{R} : a < b\}, \quad \mathcal{B}_l = \{[a, b) \subset \mathbb{R} : a < b\}.$$

これらは開基底の公理を満たし、従ってそれぞれ \mathbb{R} 上の位相を定義している。 \mathcal{B}_u から定まる \mathbb{R} 上の位相を **上限位相**、 \mathcal{B}_l から定まる \mathbb{R} 上の位相を **下限位相** という。

解答 \mathbb{R} が上限位相を持つ場合： $(a, b]$ が開集合である事は自明。 $m < a \leq m + 1, n < b \leq n + 1$ だとすると

$$(-\infty, a] = \left(\bigcup_{l \in \mathbb{Z}, l < m} (l, l + 1] \right) \cup (m, a], \quad (b, +\infty) = (b, n + 1] \cup \left(\bigcup_{l \in \mathbb{Z}, n < l} (l, l + 1] \right)$$

はそれぞれ \mathbb{R} の開集合であり、 $(a, b]^c = (-\infty, a] \cup (b, +\infty)$ だから $(a, b]^c$ は開集合、従って $(a, b]$ でも閉集合となる。

開区間 (a, b) について $1 < (b - a)n_0$ となる n_0 をとれば $(a, b) = \bigcup_{n \geq n_0} (a, b - 1/n)$ となるから、 (a, b) は開集合である。

\mathbb{R} が下限位相を持つ場合は上限位相の場合と同様に議論で証明できる。 □

p. 81 問 17. 2 実数全体の集合 \mathbb{R} に於いて、上限位相および下限位相は、共に通常の位相よりも強い位相である事を示し、更に上限位相及び下限位相の何れよりも強い位相は離散位相だけであることを示せ。

解答 問 17.1 より任意の開区間は上限位相に於いて開集合となる。通常位相に於ける開集合は開区間の和集合で表されるから、通常位相に於ける開集合は上限位相に於ける開集合となる。一方、通常位相に於いて左半開区間は開集合ではないから、これより上限位相は通常位相よりも真に強い。下限位相についても同様。

次に \mathcal{O} を上限位相、下限位相の何れよりも強い \mathbb{R} 上の位相だとすると、任意の $a \in \mathbb{R}$ に対し $(-\infty, a], [a, +\infty) \in \mathcal{O}$ となるから、 $\{a\} = (-\infty, a] \cap [a, +\infty) \in \mathcal{O}$ となる。これより任意の \mathbb{R} の部分集合は \mathcal{O} に属する事となり、故に \mathcal{O} は離散位相である事が分かる。 □

p. 82 問 17. 3 実数全体の集合 \mathbb{R} の通常位相を \mathcal{O} とし、

$$\mathcal{S} = \{(a, +\infty), (-\infty, a) \subset \mathbb{R} : a \in \mathbb{R}\} \quad (\text{開半直線の全体})$$

とする。 \mathcal{S} は \mathcal{O} の準開基底であるが、 \mathcal{O} の開基底ではない事を示せ。

解答 $-\infty < a < b < +\infty$ となる a, b に対する開区間 (a, b) は何れの開半直線も含まないので、 \mathcal{S} は \mathcal{O} の開基底ではない。一方、任意の開区間 (a, b) は $(a, b) = (-\infty, b) \cap (a, +\infty)$ というように有限個の開半直線の共通部分で表されるから、 \mathcal{S} は \mathcal{O} の準開基底である。 □

p. 82 問 17. 4 $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{S} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{4\}\}$ とする。 \mathcal{S} によって生成される集合 X 上の位相を求めよ。

解答 \mathcal{S} の元の共通部分として得られる集合は $\emptyset, \{2\} = \{1, 2\} \cap \{2, 3\}$ の 2 種。これらの和集合として得られる集合は

$$\begin{aligned} \{2, 4\} (= \{2\} \cup \{4\}), \quad \{1, 2, 3\} (= \{1, 2\} \cup \{2, 3\}), \quad \{1, 2, 4\} (= \{1, 2\} \cup \{4\}), \\ \{2, 3, 4\} (= \{2, 3\} \cup \{4\}), \quad X (= \{1, 2, 3\} \cup \{4\}) \end{aligned}$$

の5種. これを併せれば

$$\mathcal{O} = \{\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}, X\}.$$

となる. □

p. 84 問 17. 5 第2可算公理を満たす位相空間は, 第1可算公理を満たし, 可分な位相空間である事を示せ.

解答 (X, \mathcal{O}) を第2可算公理を満たす位相空間とし, \mathcal{B} を高々可算個の元からなる開基底とする. $x \in X$ に対し $\mathcal{B}_x = \{O \in \mathcal{B} : x \in O\}$ とする. x の任意の開近傍 U に対し $x \in O \subset U$ となる $O \in \mathcal{B}_x$ が存在し, 故に \mathcal{B}_x は x の基本近傍系となる. 更に $\#\mathcal{B}_x \leq \#\mathcal{B} = \aleph_0$ だから, (X, \mathcal{O}) は第1可算公理を満たす事が分かる. 次に各 $B \in \mathcal{B}$ に対し $x_B \in B$ を一つづつとり (選択公理), $D = \{x_B\}_{B \in \mathcal{B}}$ とする. 任意の $x \in X$ をとる. x の開近傍 U に対し, $B \subset U$ となる $B \in \mathcal{B}$ がとれ, 従って $x_B \in U$, $D \cap U \neq \emptyset$ となる. よって $x \in D^\alpha$, $X = D^\alpha$ となるから X は可分である. □

p. 84 問 17. 6 距離化可能で可分な位相空間は第2可算公理を満たす事を示せ.

解答 d を集合 X 上の距離関数とし, D を $D^\alpha = X$ となる高々可算個の点からなる部分集合とする. 更に $x \in D$ に対し $\mathcal{U}_x = \{U_{1/n}^d(x)\}_{n=1,2,\dots}$ と置き, $\mathcal{U} = \bigcup_{x \in D} \mathcal{U}_x$ とする. \mathcal{U} は高々可算個の元からなる. 任意の開集合 O と $x \in O$ をとる. $D^\alpha = X$ より $U_{1/n}^d(x) \cap D \neq \emptyset$ ($n = 1, 2, \dots$) であり, 一方, $x \in O$ だから $U_{1/n}^d(x) \subset O$ ($n \geq n_0$) となる n_0 がとれる. ここで $y \in U_{1/4n_0}^d(x) \cap D$ をとり, $U = U_{1/2n_0}(y) \in \mathcal{U}$ とする. $d(x, y) < 1/4n_0 < 1/2n_0$ より $x \in U$. 任意の $z \in U$ に対し

$$d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < \frac{1}{2n_0} + \frac{1}{4n_0} = \frac{3}{4n_0} < \frac{1}{n_0}, \quad z \in U_{1/n_0}(x) \subset O$$

だから $U \subset O$ となる. これより \mathcal{U} が \mathcal{O} の開基底である事が分かり, 従って X は第2可算公理を満たす. □

p. 84 問 17. 7 \mathbb{R}^2 に於いて

$$\mathcal{B} = \{[a, b) \times [c, d) \subset \mathbb{R}^2 : a < b, c < d\}$$

を開基底とする位相を \mathcal{O} とする. 次の事を示せ.

- (1) 位相空間 $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O})$ は第1可算公理を満たし, 可分である.
- (2) \mathbb{R}^2 の部分集合 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}$ 上の相対位相は離散位相である.
- (3) 位相空間 $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O})$ は第2可算公理を満たさない.

解答 (1) $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対し

$$\mathcal{U}_{\mathbf{x}} = \{I_{1/n}(\mathbf{x})\}_{n \in \mathbb{Z}_{>0}}, \quad I_{1/n}(\mathbf{x}) = [x, x + 1/n) \times [y, y + 1/n)$$

と置く. O を \mathbf{x} の近傍だとする. \mathcal{B} は \mathcal{O} の開基底だから $\mathbf{x} \in [a, b) \times [c, d) \subset O$ ($a < b, c < d$) となる a, b, c, d が存在. n を十分大きくとれば $I_{1/n}(\mathbf{x}) \subset [a, b) \times [c, d)$ となるから, $\mathcal{U}_{\mathbf{x}}$ は \mathbf{x} に於ける基本近傍系であり, 作り方より可算個からなる. 故に $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O})$ は第1可算公理を満たす.

また任意の \mathbf{x} , 及び $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $I_{1/n}(\mathbf{x}) \cap \mathbb{Q}^2 \neq \emptyset$ だから \mathbb{Q}^2 は稠密. 故に $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O})$ は可分である.

(2) $\mathbf{x} = (x, y) \in A$ とする. $(x', y') \in I_1(\mathbf{x})$ に対し $x' + y' = 1$ ならば $x \leq x' < x + 1$ かつ $x - 1 < x' \leq x$ となり, これは $x' = x$ のときのみ成立. 即ち $I_1(\mathbf{x}) \cap A = \{\mathbf{x}\}$ となる. 故に A の各点は (相対位相に関して) 開集合となり, 故に A は離散空間となる.

(3) A が第2可算公理を満たすとする. 即ち高々可算個の元からなる開基底 \mathcal{B} を持つとする. 任意の $a \in A$ に対し $\{a\}$ は開集合だから, $a \in B_a \subset \{a\}$ となる $B_a \in \mathcal{B}$ が存在. これより $\{a\} \in \mathcal{B}$ となるが, \mathcal{B} は連続濃度以上となり矛盾する. 故に A は第2可算公理を満たさない.

\mathbb{R}^2 が第2可算公理を満たすならば, その部分空間 A も第2可算公理を満たさなければならないが, これは上の事実に反する. 故に \mathbb{R}^2 は第2可算公理を満たさない. □

※ 一般に第 2 可算公理を満たす位相空間 (X, \mathcal{O}) の部分空間 (Y, \mathcal{O}_Y) は再び第 2 可算公理を満たす。実際、 \mathcal{B} を高々可算個からなる \mathcal{O} の開基底とし、 $\mathcal{B}_Y := \{B \cap Y \subset Y : B \in \mathcal{B}\}$ とする。 $U = O \cap Y$ ($O \in \mathcal{O}$) を Y の任意の開集合とする。任意の $y \in U$ をとるとき、 $y \in O$ だから $y \in B \subset O$ となる $B \in \mathcal{B}$ が存在。 $y \in B \cap Y \subset U$ となるから \mathcal{B}_Y は \mathcal{O}_Y の開基底である。

p. 84 問 17. 8 (X_1, \mathcal{O}_1) 及び (X_2, \mathcal{O}_2) を位相空間とし、 \mathcal{S} を位相 \mathcal{O}_2 の準開基底とする。写像 $f : X_1 \rightarrow X_2$ について \mathcal{S} に属する X_2 の部分集合の f による逆像が常に \mathcal{O}_1 に属する事と、 f が位相空間 (X_1, \mathcal{O}_1) から位相空間 (X_2, \mathcal{O}_2) への連続写像である事は同等であることを示せ。

解答 f が連続だとすると \mathcal{S} の元の f による逆像が \mathcal{O}_1 に属する事は明らか。逆に \mathcal{S} の元の f による逆像が \mathcal{O}_1 に属するとする。 \mathcal{S} の有限個の共通部分となる部分集合の全体を \mathcal{B} とすれば、 \mathcal{B} は \mathcal{O}_2 の開基底となる。 $B = \bigcap_{i=1}^m U_i \in \mathcal{B}$ ($U_i \in \mathcal{S}$) だとすると $f^{-1}(B) = \bigcap_{i=1}^m f^{-1}(U_i) \in \mathcal{O}_1$ となる。更に任意の $O \in \mathcal{O}_2$ は $O = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$ ($B_\lambda \in \mathcal{B}$) と表され、 $f^{-1}(O) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(B_\lambda) \in \mathcal{O}_1$ となる。故に f は連続となる。□

p. 84 問 17. 9 実数全体の集合 \mathbb{R} に於いて通常の位相を \mathcal{O} で表し、上限位相を \mathcal{O}_u で表そう。写像 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \leq 1) \\ x+2 & (x > 1) \end{cases}$$

によって定義する。次のそれぞれの場合について f が連続であるかどうかを判定せよ。

- (1) $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ から $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ への写像として。
- (2) $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_u)$ から $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_u)$ への写像として。
- (3) $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ から $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_u)$ への写像として。
- (4) $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_u)$ から $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ への写像として。

解答 (1) $f(1) = 1$ の近傍 $J = (1/2, 3/2)$ をとる。 $x > 1$ のとき $3 < f(x)$ となるから、 $x = 1$ の如何なる近傍 I も $f(I) \subset J$ とならない。故に f は $(x = 1)$ で不連続である。

(2) $x \leq 1$ のとき、 $f(x)$ の近傍 $(x - \varepsilon, x]$ ($\varepsilon > 0$) に対し $f((x - \varepsilon, x]) = (x - \varepsilon, x]$ だから、 f は $x \leq 1$ となる各点 x に於いて連続。 $1 < x$ のとき、 $f(x)$ の近傍 $(x + 2 - \varepsilon, x + 2]$ ($\varepsilon > 0$) に対し $f((x - \varepsilon, x]) = (x + 2 - \varepsilon, x + 2]$ だから、 f は $x > 1$ となる各点 x に於いても連続。

(3) $x > 1$ とする。 $f(x)$ の近傍 $(x + 1, x + 2]$ をとる。このとき x の ε 近傍 $I_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ ($0 < \varepsilon < 1$) について、 $x < t < x + \varepsilon$ とすると $f(t) = t + 2 > x + 2$ 、従って $f(I_\varepsilon(x)) \not\subset (x + 1, x + 2]$ となり、如何なる $\varepsilon > 0$ に対しても $f(I_\varepsilon(x))$ は $(x - 1, x]$ に含まれない。

(4) $x \leq 1$ のとき、 $f(x)$ の近傍 $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ に対し $f((x - \varepsilon, x]) = (x - \varepsilon, x] \subset (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ だから f は x に於いて連続である。 $x > 1$ のとき、 $f(x)$ の近傍 $(x + 2 - \varepsilon, x + 2 + \varepsilon)$ に対し $f((x - \varepsilon, x]) = (x + 2 - \varepsilon, x + 2] \subset (x + 2 - \varepsilon, x + 2 + \varepsilon)$ だから f は x に於いて連続である。□