

§ 16 近傍系と連続写像

p. 76 問 16. 1 (X, \mathcal{O}) を位相空間とし, A を X の部分集合とする. A の閉包 A^a と導集合 A^d について $A^a = A \cup A^d$ が成り立つ事を示せ.

解答 $x \in A^d$ のとき, $x \in (A - \{x\})^a \subset A^a$ より $x \in A^a$. $A \subset A^a$ と併せて $A \cup A^d \subset A^a$ となる. 逆に $x \in A^a$ について, $x \notin A$ ならば $A - \{x\} = A$ だから $x \in A^a = (A - \{x\})^a$, 即ち $x \in A^d$ となる. 従って $A^a \subset A \cup A^d$ であり, $A \cup A^d \subset A^a$ と併せて $A^a = A \cup A^d$ となる. \square

p. 76 問 16. 2 (X, d) を距離空間とし, \mathcal{O} を d によって定まる距離位相とする. X の点 a について, 距離空間 (X, d) に於ける点 a の近傍系と, 位相空間 (X, \mathcal{O}) に於ける点 a の近傍系とは一致する事を確かめよ.

解答 近傍の定義を確認:

U は a の距離空間としての近傍 $\Leftrightarrow_{\text{def}} U_\varepsilon^d(a) \subset U$ となる $\varepsilon > 0$ が存在する.

O は a の位相空間としての近傍 $\Leftrightarrow_{\text{def}} a$ は O の内部 O^i の点となる.

O^i は O の (距離空間に於ける) 内点, 即ち $U_\varepsilon^d(x) \subset O$ となる $\varepsilon > 0$ が存在するような点 $x \in X$ の全体だから, 後者は

O は a の位相空間としての近傍 $\Leftrightarrow_{\text{def}} U_\varepsilon^d(a) \subset U$ となる $\varepsilon > 0$ が存在する.

となり, 故に距離空間に於ける近傍の定義と位相空間に於ける近傍の定義は一致. 故に近傍系は一致する. \square

p. 77 問 16. 3 (X_1, d_1) 及び (X_2, d_2) を距離空間とし, \mathcal{O}_j を d_j によって定まる距離位相とする. 写像 $f: X_1 \rightarrow X_2$ について, f が距離空間 (X_1, d_1) から (X_2, d_2) への連続写像である事と, f が位相空間 (X_1, \mathcal{O}_1) から (X_2, \mathcal{O}_2) への連続写像である事とは同等である事を確かめよ.

解答 f が距離空間としての連続写像だとする. $O_2 \in \mathcal{O}_2$ とする. 任意の $x \in f^{-1}(O_2)$ に対し, O_2 は $f(x)$ の開近傍だから $U_\varepsilon^{d_2}(f(x)) \subset O_2$ となる $\varepsilon > 0$ が存在. 更に $f(U_\delta^{d_1}(x)) \subset U_\varepsilon^{d_2}(f(x))$ となる $\delta > 0$ が存在. これより $U_\delta^{d_1}(x) \subset f^{-1}(O_2)$ となるから x は $f^{-1}(O_2)$ の内点となり, 従って $f^{-1}(O_2) \in \mathcal{O}_1$ となる. 故に f は位相空間としての連続写像である.

逆に f が位相空間としての連続写像だとする. 任意の $x \in X$, 及び $f(x)$ の任意の近傍 $U_\varepsilon^{d_2}(f(x))$ に対し $f^{-1}(U_\varepsilon^{d_2}(f(x))) \in \mathcal{O}_1$. x は $f^{-1}(U_\varepsilon^{d_2}(f(x)))$ の内点となるから, $U_\delta^{d_1}(x) \subset f^{-1}(U_\varepsilon^{d_2}(f(x)))$, 従って $f(U_\delta^{d_1}(x)) \subset U_\varepsilon^{d_2}(f(x))$ となる $\delta > 0$ が存在する. 故に f は x に於いて距離空間として連続である. \square

p. 78 問 16. 4 実数全体の集合 \mathbb{R} に通常の位相を与え, \mathbb{R} の部分集合には相対位相を与えるものとして, 次の事を示せ.

- (1) 开区間 (a, b) と开区間 (c, d) とは常に同相である.
- (2) 闭区間 $[a, b]$ と闭区間 $[c, d]$ とは常に同相である.
- (3) 开区間 (a, b) と \mathbb{R} とは常に同相である.

解答 (1) (2) a, b, c, d ($a < b, c < d$) に対し

$$f(x) = \frac{d-c}{b-a}x - \frac{ad-bc}{b-a}, \quad g(x) = \frac{b-a}{d-c}x + \frac{ad-bc}{d-c}$$

とする. f, g は連続であり $g \circ f = 1_{\mathbb{R}}, f \circ g = 1_{\mathbb{R}}$ となるから, 特に f, g は単射である. また $f((a, b)) = (c, d)$, $f([a, b]) = [c, d]$, $g((c, d)) = (a, b)$, $g([c, d]) = [a, b]$ となる事が容易に分かる. よって f の (a, b) への制限は (a, b) から

(c, d) への同相写像 (逆は g の (c, d) への制限) となり, f の $[a, b]$ への制限は $[a, b]$ から $[c, d]$ への同相写像 (逆は g の $[c, d]$ への制限) となる.

(3) 上の証明で用いた f に於いて $c = -\pi/2$, $d = \pi/2$ とすれば (a, b) から $(-\pi/2, \pi/2)$ への同相写像となる. 次に $h : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$ を $h(x) = \tan x$ により定義すれば h は $(-\pi/2, \pi/2)$ から \mathbb{R} への同相写像である. 故に $(a, b) \simeq (-\pi/2, \pi/2) \simeq \mathbb{R}$ となる. \square

p. 78 問 16. 5 (X, \mathcal{O}) 及び (X', \mathcal{O}') を位相空間とし, A, B を位相空間 (X, \mathcal{O}) の閉集合で $A \cup B = X$ なるものとする. 写像 $f : X \rightarrow X'$ に対して, $f_A : A \rightarrow X'$ 及び $f_B : B \rightarrow X'$ を f の制限写像, 即ち

$$f_A(a) = f(a) \quad (a \in A), \quad f_B(b) = f(b) \quad (b \in B)$$

なるものとする. 写像 f が位相空間 (X, \mathcal{O}) から (X', \mathcal{O}') への連続写像である為の必要十分条件は, f_A が部分空間 (A, \mathcal{O}_A) から (X', \mathcal{O}') への連続写像であり, 同時に f_B が部分空間 (B, \mathcal{O}_B) から (X', \mathcal{O}') への連続写像である事を示せ.

解答 f は連続だとする. $a \in A$ 及び $f(a)$ の開近傍 $V \in \mathcal{O}'$ をとるとき, f の連続性より $f(U) \subset V$ となる a の開近傍 $U \in \mathcal{O}$ が存在. 特に $f(U \cap A) \subset V$ かつ $U \cap A$ は A に於ける a の開近傍だから f_A は連続である. f_B についても同様.

逆に f_A, f_B が共に連続だとする. $x \in X$ とし V を $f(x)$ の開近傍とする. 仮定より $A - A \cap B = X - B$ だから $x \in A - A \cap B$ ならば $f(U) \subset V$, $U \subset A - A \cap B$ となる x の開近傍 $U \in \mathcal{O}$ が存在し, よって f は x で連続となる. $B - A \cap B$ の点についても同様. 次に $x \in A \cap B$ とする. f_A の連続性より $f_A(U_A \cap A) \subset V$, $x \in U_A \cap A$ となる開近傍 $U_A \in \mathcal{O}$ が存在. f_B の連続性より $f_B(U_B \cap B) \subset V$, $x \in U_B \cap B$ となる開近傍 $U_B \in \mathcal{O}$ が存在. $U \subset U_A \cap U_B$ となる x の開近傍 U をとれば $f(U) \subset V$ となる. 故に f は連続となる. \square

p. 78 問 16. 6 (X, \mathcal{O}) を位相空間とし, (Y, \mathcal{O}_Y) をその部分空間とする. $A \subset Y$ に対して, 部分空間 (Y, \mathcal{O}_Y) に於ける A の導集合は, 位相空間 (X, \mathcal{O}) に於ける A の導集合 A^d と Y との共通部分 $A^d \cap Y$ に一致する事を示せ.

解答 Y の任意の部分集合 B に対し, X に於ける B の閉包を B^a , Y に於ける B の閉包, 導集合をそれぞれ $B^{a'}$, $B^{d'}$ と記す. p.73 問 15.7 より

$$x \in A^{d'} \Leftrightarrow x \in (A - \{x\})^{a'} = (A - \{x\})^a \cap Y \Leftrightarrow x \in A^d \cap Y$$

だから $A^{d'} = A^d \cap Y$ となる. \square