§ 15　位相

p. 69　問 15．1　集合 $X = \{1, 2, 3\}$ の上の位相をすべて求めよ．

解答　3 元の集合上の位相構造は次の 29 通り：

$\mathfrak{O}_{\text{triv.}} = \{\varnothing, S\}$　(密着位相),

$\mathfrak{O}_1 = \{\varnothing, \{1\}, S\}$,　$\mathfrak{O}_2 = \{\varnothing, \{2\}, S\}$,　$\mathfrak{O}_3 = \{\varnothing, \{3\}, S\}$,

$\mathfrak{O}_4 = \{\varnothing, \{1, 2\}, S\}$,　$\mathfrak{O}_5 = \{\varnothing, \{2, 3\}, S\}$,　$\mathfrak{O}_6 = \{\varnothing, \{3, 1\}, S\}$,

$\mathfrak{O}_7 = \{\varnothing, \{1\}, \{1, 2\}, S\}$,　$\mathfrak{O}_8 = \{\varnothing, \{2\}, \{1, 2\}, S\}$,　$\mathfrak{O}_9 = \{\varnothing, \{2\}, \{2, 3\}, S\}$,
$\mathfrak{O}_{10} = \{\varnothing, \{3\}, \{2, 3\}, S\}$,　$\mathfrak{O}_{11} = \{\varnothing, \{3\}, \{3, 1\}, S\}$,　$\mathfrak{O}_{12} = \{\varnothing, \{1\}, \{3, 1\}, S\}$,

$\mathfrak{O}_{13} = \{\varnothing, \{1\}, \{2, 3\}, S\}$,　$\mathfrak{O}_{14} = \{\varnothing, \{2\}, \{3, 1\}, S\}$,　$\mathfrak{O}_{15} = \{\varnothing, \{3\}, \{1, 2\}, S\}$,

$\mathfrak{O}_{16} = \{\varnothing, \{1\}, \{3, 1\}, \{1, 2\}, S\}$,　$\mathfrak{O}_{17} = \{\varnothing, \{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, S\}$,　$\mathfrak{O}_{18} = \{\varnothing, \{3\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}, S\}$,
$\mathfrak{O}_{19} = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, S\}$,　$\mathfrak{O}_{20} = \{\varnothing, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}, S\}$,　$\mathfrak{O}_{21} = \{\varnothing, \{3\}, \{1\}, \{3, 1\}, S\}$,

$\mathfrak{O}_{22} = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, S\}$,　$\mathfrak{O}_{23} = \{\varnothing, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, S\}$,
$\mathfrak{O}_{24} = \{\varnothing, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}, S\}$,　$\mathfrak{O}_{25} = \{\varnothing, \{3\}, \{1\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}, S\}$,
$\mathfrak{O}_{26} = \{\varnothing, \{3\}, \{1\}, \{3, 1\}, \{1, 2\}, S\}$,　$\mathfrak{O}_{27} = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3, 1\}, \{1, 2\}, S\}$,

$\mathfrak{O}_d = \mathfrak{P}(S)$　(離散位相)

(ここで $\mathfrak{P}(S)$ は S のベキ集合を表す)．　□

p. 69　問 15．2　離散位相は常に距離化可能であり，密着位相は一般に距離化可能でない事を示せ．

解答　d_0 を X 上の離散距離，即ち $d_0(x, y) = \delta_{x,y}$　(δ は Kronecker の delta) とする．$x \in X$，$\varepsilon > 0$ に対し x を中心とする d_0 に関する ε 近傍を $U_\varepsilon(x)$ と記す．$0 < \varepsilon < 1$ だとすると $U_\varepsilon(x) = \{x\}$ となるから，任意の部分集合の任意の点は全て内点，従って開集合となる．故に d_0 の定める位相は離散位相になる．

一方，(X, d) を 2 個以上の点を含む距離空間とし，$x, y \in X$ $(x \neq y)$, $\varepsilon = d(x, y)$ とする．$A = U_{\varepsilon/2}(x)$ とすれば A は X の開集合であり，かつ $y \notin A$，特に $A \subsetneq X$ となる．従って X 以外の開集合が存在するから，(X, d) は密着位相空間にはならない．　□

※　点の個数が 1 個の距離空間は離散位相空間，かつ密着位相空間となる．

p. 69　問 15．3　位相空間 $(X, \mathscr{O})$ の閉集合の全体 $\mathfrak{A}$ は，次の条件を満足する事を確めよ．
(F$_1$)　$X \in \mathfrak{A}$，$\varnothing \in \mathfrak{A}$.
(F$_2$)　$F_1, F_2 \in \mathfrak{A}$ ならば $F_1 \cup F_2 \in \mathfrak{A}$.
(F$_3$)　$F_\lambda \in \mathfrak{A}$　$(\lambda \in \Lambda)$ ならば $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \in \mathfrak{A}$.

解答　(F$_1$)　$X^c = \varnothing, \varnothing^c = X \in \mathscr{O}$ だから $X, \varnothing \in\in \mathfrak{A}$ となる．
(F$_2$)　$F_1, F_2 \in \mathfrak{A}$ ならば $F_1^c, F_2^c \in \mathscr{O}$．de Morgan の法則と開集合系の公理より $(F_1 \cup F_2)^c = F_1^c \cap F_2^c \in \mathscr{O}$．故に $F_1 \cup F_2 \in \mathfrak{A}$.
(F$_3$)　$F_\lambda \in \mathfrak{A}$ ならば $F_\lambda^c \in \mathscr{O}$．de Morgan の法則と開集合系の公理より $(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda)^c = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda^c \in \mathscr{O}$．故に $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \in \mathfrak{A}$.　□

※ (F$_1$) への注意：集合 X の部分集合 A の補集合 A^c の定義は $A^c = X - A$ だから，この定義に従えば $\varnothing^c = X - \varnothing = X$，$X^c = X - X = \varnothing$ となる．

p. 71　問 15．4　(X,d) を距離空間とし，$\mathscr{O}$ を d によって定まる距離位相とする．X の部分集合 A について，距離空間 (X,d) における A の内部と，位相空間 $(X,\mathscr{O})$ に於ける A の内部とは一致し，距離空間 (X,d) に於ける A の閉包と，位相空間 $(X,\mathscr{O})$ に於ける A の閉包とは一致する事を確めよ．

解答　位相空間 $(X,\mathscr{O})$ に於ける A の内部と，距離空間 (X,d) における A の内部をそれぞれ A^i, $A^{i'}$ と記す．$x \in A^{i'}$ ならば $U_\varepsilon(x) \subset A$ となる $\varepsilon > 0$ が存在する．特に $U_\varepsilon(x)$ は A に含まれる開集合だから $U_\varepsilon(x) \subset A^i$，従って $x \in A^i$ となる．逆に $x \in A^i$ ならば A^i は開集合だから $U_\varepsilon(x) \subset A^i$ となる $\varepsilon > 0$ が存在．$A^i \subset A$ と併せて $U_\varepsilon(x) \subset A$．よって $x \in A^{i'}$．故に $A^i = A^{i'}$ となる．

位相空間 $(X,\mathscr{O})$ に於ける A の閉包と，距離空間 (X,d) における A の閉包をそれぞれ A^a, $A^{a'}$ と記す．前半より $(A^{a'})^c = (A^c)^{i'}$ は開集合，従って $A^{a'}$ は閉集合であり，特に A を含む．A^a は A を含む最小の閉集合だから $A^a \subset A^{a'}$ である．仮に $A^{a'} - A^a \neq \varnothing$ だとすると，$x \in A^{a'} - A^a$ が存在．A^{ac} は開集合だから，$U_\varepsilon(x) \subset A^{ac}$ となる $\varepsilon > 0$ が存在．$A \subset A^a$ より $U_\varepsilon(x) \cap A = \varnothing$ となるが，これは $x \in A^{a'}$ である事に反する．故に $A^{a'} - A^a = \varnothing$，即ち $A^{a'} \subset A^a$，$A^{a'} = A^a$ となる．□

※　位相空間に於ける諸概念の定義は教科書によって相当異なる．位相空間論で最初にやる事は，これらの定義が同値である事を確める事である．

※　距離空間は (所定の手続きの下で) 位相空間となるから，内部，閉包などの諸概念は同一のものとなるが，距離空間に於ける定義と位相空間に於ける定義には差がある．この講義に於ける内部，閉包，外部，境界，開集合及び閉集合の定義は次の通り：

(内部)

距離空間：$U_\varepsilon(x) \subset A$ となる $\varepsilon > 0$ が存在するとき，x を A の “内点” といい，A の内点の全体 $A^{i'}$ を A の “内部” という．
位相空間：A に含まれる開集合の中で，包含関係に関して最大のもの A^i を A の “内部” という．

(閉包)

距離空間: 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $U_\varepsilon(x) \cap A \neq \varnothing$ となるとき，x を A の “触点” といい，A の触点の全体 $A^{a'}$ を A の “閉包” という．
位相空間: A を含む閉集合の中で，包含関係に関して最小のもの A^a を A の “閉包” という．

(外部)

距離空間: $U_\varepsilon(x) \subset A^c$ となる $\varepsilon > 0$ が存在するとき，x を A の “外点” といい，A の外点の全体 $A^{e'}$ を A の “外部” という．
位相空間: A^c に含まれる開集合の中で，包含関係に関して最大のもの A^e (即ち $(A^c)^i$) を A の “外部” という．

(境界)

距離空間: 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $U_\varepsilon(x) \cap A \neq \varnothing$ かつ $U_\varepsilon(x) \cap A^c \neq \varnothing$ となるとき，x を A の “境界点” といい，A の境界点の全体 $A^{f'}$ を A の “境界” という．
位相空間: $A^f = A^a - A^i$ を A の “閉包” という．

(開集合)

距離空間: $A^{i'} = A$，即ち A の任意の点 x が A の内点のとき，A を “開集合” という．
位相空間: X の開集合系 (= 位相構造) $\mathscr{O}$ に含まれる X の部分集合を X の “開集合” という．

(閉集合)

距離空間: $A^{a'} = A$，即ち A の任意の点 x が A の触点のとき，A を “閉集合” という．
位相空間: 補集合が開集合となる X の部分集合を X の “閉集合” という．

距離空間の方は或る性質をもつ点の集まりとして定義するのに対し，位相空間の方は或る性質をもつ集合として定義する．ちなみに位相空間に於ける内点，触点などの点に関する概念は集合を用いて定義される．

※　位相空間 X の部分集合 A に対し，その内部 A^i，即ち A に含まれる最大の開集合は必ず存在する．実際，A に対し

$$\mathscr{S} = \{O \in \mathscr{O} : O \subset A\}, \qquad A^\circ = \bigcup \mathscr{S}\ (= \bigcup_{O \in \mathscr{O}} O)$$

とする．$\varnothing \in \mathscr{O}$，$\varnothing \subset A$ より $\varnothing \in \mathscr{S}$，特に $\mathscr{S} \neq \varnothing$．$\mathscr{S}$ の元は $\mathscr{O}$ の元だから，$\mathbf{O}_3$ より A° も開集合．また定義より $A^\circ \subset A$，従って $A^i \in \mathscr{S}$ となる．さらに定義より任意の $O \in \mathscr{O}$ に対し $O \subset A^\circ$ となるから，A° は $\mathscr{S}$ の最大元となる．

以上のように内部の存在は位相空間の定義より導かれる．また閉包についても同様の議論で存在が証明される．これらの存在は定義より容易に導かれるが，決して自明ではない．

p. 71　問 15. 5　$(X, \mathscr{O})$ を位相空間とし，A を X の部分集合とする．A の補集合の閉包 A^{ca} $(= (A^c)^a)$ は A の内部の補集合 A^{ic} $(= (A^i)^c)$ と一致し，A の補集合の内部 A^{ci} $(= (A^c)^i)$ は A の閉包の補集合 A^{ac} $(= (A^a)^c)$ と一致する事を示せ．

解答　$A^i \subset A$ より $A^{ic} \supset A^c$．A^i は開集合だから，その補集合 A^{ic} は閉集合である．A^{ca} は A^c を含む最小の閉集合だから $A^{ic} \supset A^{ca} \supset A^c$ が成立．再度補集合をとると $A^i \subset A^{cac} \subset A$ となる．A^{ca} は閉集合だから A^{cac} は開集合であり，A^i は A に含まれる最大の開集合だから $A^i \supset A^{cac}$，従って $A^{ic} \subset A^{ca}$ となる．$A^{ic} \supset A^{ca}$ と併せて $A^{ic} = A^{ca}$ が成り立つ．

$A \subset A^a$ より $A^c \supset A^{ac}$．A^a は閉集合だから，その補集合 A^{ac} は開集合である．A^{ci} は A^c に含まれる最大の開集合だから $A^c \supset A^{ci} \supset A^{ac}$ が成立．再度補集合をとると $A \subset A^{cic} \subset A^a$ となる．A^{ca} は閉集合だから A^{cac} は開集合であり，A^a は A を含む最小の閉集合だから $A^{cic} \supset A^a$，従って $A^{ci} \subset A^{ac}$ となる．$A^{ci} \supset A^{ac}$ と併せて $A^{ci} = A^{ac}$ が成り立つ．　□

p. 71　問 15. 6　X を空でない集合とし，写像 $i : \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(X)$ が次の条件を満足しているものとする．

- $\mathbf{I}_1$　$i(X) = X$．
- $\mathbf{I}_2$　$i(A) \subset A$ が各 $A \in \mathfrak{P}(X)$ に対して成り立つ．
- $\mathbf{I}_3$　$i(A \cap B) = i(A) \cap i(B)$ が各 $A, B \in \mathfrak{P}(X)$ に対して成り立つ．
- $\mathbf{I}_4$　$i(i(A)) = i(A)$ が各 $A \in \mathfrak{P}(X)$ に対して成り立つ．

このとき，集合 X の位相 $\mathscr{O}$ で，写像 i が位相空間 $(X, \mathscr{O})$ の開核作用素に一致するものが，ただ一つ存在する事を示せ．

解答　一般に部分集合 A, B に対し $A \subset B$ ならば $i(A) \subset i(B)$ が成立する．(実際，$\mathbf{I}_3$ から $i(A) = i(A \cap B) = i(A) \cap i(B) \subset i(B)$ となる.)　これに注意して開核作用素 i を用いて

$$\mathscr{O} = \{O \subset X :\ i(O) = O\}$$

とする．

- $\mathbf{O}_1$　$\mathbf{I}_1$ より $X \in \mathscr{O}$．$\mathbf{I}_2$ より $i(\varnothing) \subset \varnothing$，従って $i(\varnothing) = \varnothing$ だから $\varnothing \in \mathscr{O}$．
- $\mathbf{O}_2$　$O_1, O_2 \in \mathscr{O}$ のとき，$\mathbf{I}_3$ より $i(O_1 \cap O_2) = i(O_1) \cap i(O_2) = O_1 \cap O_2$．従って $O_1 \cap O_2 \in \mathscr{O}$ となる．
- $\mathbf{O}_3$　$O_\lambda \in \mathscr{O}$　$(\lambda \in \Lambda)$ とする．$\mathbf{I}_2$ より $i\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda\right) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$．これより

$$O_\lambda = i(O_\lambda) \subset i\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda\right), \qquad \therefore \quad \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \subset i\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda\right).$$

故に $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathscr{O}$ となる．

以上より $\mathscr{O}$ は X 上の位相構造となる．次に任意の部分集合 $A \subset X$ をとる．A の内部を A^i とする．$\mathbf{I}_2$ $\mathbf{I}_4$ より $i(A)$ は A に含まれる開集合であるから，$i(A) \subset A^i \subset A$ が成立．この包含関係に開核作用素を当てると $\mathbf{I}_4$ より $i(i(A)) \subset i(A^i) = i(A) \subset i(A^i) = A^i \subset i(A)$ だから $i(A) = A^i$ となる．

X 上の位相構造 $\mathscr{O}'$ で，任意の部分集合 $A \subset X$ に対し，その内部 $A^{i'}$ が $i(A)$ と一致するようなものがとれたとすると，$O \subset X$ に対し

$$O \in \mathscr{O}' \quad \Leftrightarrow \quad O^{i'} = O \quad \Leftrightarrow \quad i(O) = O \quad \Leftrightarrow \quad O \in \mathscr{O}$$

より $\mathscr{O}' = \mathscr{O}$ である．従って $i(A)$ と A の内部が一致するような X 上の位相構造は一意である．　□

※　“内部” と “開核” は同じ意味である．

p. 71　問 15. 7　$(X, \mathscr{O})$ を位相空間とし，$(Y, \mathscr{O}_Y)$ をその部分空間とする．Y の部分集合 A に対して，部分空間 $(Y, \mathscr{O}_Y)$ に於ける A の閉包は，位相空間 $(X, \mathscr{O})$ に於ける A の閉包 $\overline{A}$ と Y の共通部分 $\overline{A} \cap Y$ に一致する事を示せ．また，位相空間

$(X, \mathscr{O})$ に於ける A の内部 A^i (及び境界 A^f) について，$A^i \cap Y$ (及び $A^f \cap Y$) は，一般には部分空間 $(Y, \mathscr{O}_Y)$ に於ける A の内部 (及び境界) とは一致しない事を示せ.

解答 閉包： A の $(X, \mathscr{O}_X)$ に於ける閉包を A^a，$(Y, \mathscr{O}_Y)$ に於ける閉包を $A^{a'}$ とする．$A^{a'}$ は $(Y, \mathscr{O}_Y)$ の閉集合だから $A^{a'} = F \cap Y$ となる $(X, \mathscr{O})$ の閉集合 F が存在する．$A \subset A^{a'} \subset F$ だから $A \subset A^a \subset F$，従って $A \subset A^a \cap Y \subset F \cap Y = A^{a'}$ となる．一方，$A^a \cap Y$ は A を含む $(Y, \mathscr{O}_Y)$ の閉集合だから $A^{a'} \subset A^a \cap Y$ となる．従って $A^{a'} = A^a \cap Y$ である．
内部，境界： $A \subset Y$ の X に於ける内部を A^i，Y に於ける内部を $A^{i'}$，X に於ける境界を A^f，Y に於ける境界を $A^{f'}$ とする．X の開集合 O が A に含まれるならば，$A \subset Y$ より $O = O \cap Y$ だから O は Y の開集合．従って $A^i \cap Y = A^i \subset A^{i'}$ が成立．また $A^f = A^a - A^i$，$A^f \cap Y = A^a \cap Y - A^i$，$A^{f'} = A^{a'} - A^{i'} = A^a \cap Y - A^{i'}$ より $A^{f'} \subset A^f \cap Y$ となる.
　これらの逆 $A^{i'} \subset A^i \cap Y$，$A^f \cap Y \subset A^{f'}$ は成立しない.

(反例) $X = \mathbb{R}^2$ (X には通常位相を導入) とし,

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y\}, \qquad X_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y\}$$

とする．Y は X_+ と実軸 $\mathbb{R} = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$ との非交和となる．$\mathbb{R}$ 上の点 $(x, 0)$ を単に x と記す事にする．$x \in \mathbb{R}$ に於ける ε 近傍 $U_\varepsilon(x)$ と Y との共通部分は

$$U_\varepsilon(x) \cap Y = U_\varepsilon(x) \cap X_+ \amalg (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$$

((a, b) によって a, b を端点とする開区間を表す) となり，特に近傍が実軸の一部分を含む事に注意する (右図 1 参照).

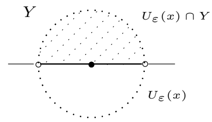

図 1

　Y の部分集合 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y,\ x^2 + y^2 < 1\}$ について，X に於ける A の内部，境界はそれぞれ

$$A^i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y,\ x^2 + y^2 < 1\}, \qquad A^f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y,\ x^2 + y^2 = 1\} \cup (-1, 1).$$

一方，Y に於ける内部，境界はそれぞれ

$$A^{i'} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y,\ x^2 + y^2 < 1\} \cup (-1, 1), \qquad A^{f'} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y,\ x^2 + y^2 = 1\}.$$

となる．これらから $A^i \subsetneq A^{i'}$，$A^{f'} \subsetneq A^f$ となる事が分かる (下図 2 参照).

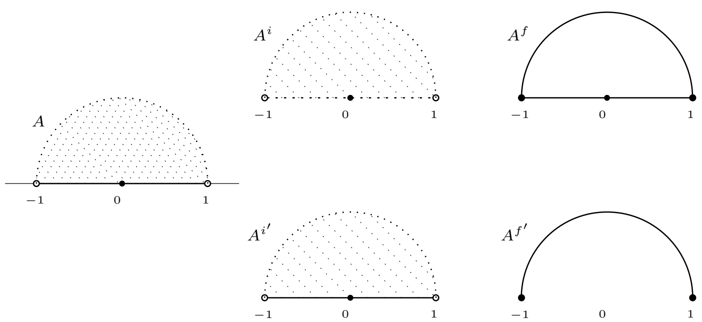

図 2

□