§ 14　近傍系と連続写像

p. 66　問 14. 1　(X, d) を距離空間とし，A を X の空ではない部分集合とする．実数値関数 $f : X \to \mathbb{R}$ を $f(x) = d(x, A)$ によって定義すれば，f は距離空間 (X, d) から 1 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}$ への連続写像になる事を示せ．

解答　任意の $x, y \in X$ 及び任意の $a \in A$ に対し $d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$ より $d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, a)$，従って $d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, A)$．$x, y$ の役割を入れ替えれば $d(y, A) - d(y, x) \leq d(x, A)$．従って

$$|f(x) - f(y)| = |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$$

が成立し，故に f は連続である．　□

p. 66　問 14. 2　距離空間 (X, d) に於いて，A, B を互いに交わらない空でない閉集合とすれば，互いに交わらない (X, d) の開集合 U, V で $A \subset U$ かつ $B \subset V$ となるものが存在する事を示せ．

解答　$U = \{x \in X : d(x, A) < d(x, B)\}$，$V = \{x \in X : d(x, A) > d(x, B)\}$ とする．$d(a, A) = 0$　$(a \in A)$，$d(b, B) = 0$　$(b \in B)$ より $A \subset U$，$B \subset V$ かつ $U \cap V = \varnothing$ が成立．写像 $D : X \to \mathbb{R}^2$ を $D(x) = (d(x, A), d(x, B))$ で定義すれば D は連続．U, V はそれぞれ $\mathbb{R}^2$ の開集合 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}$，$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$ の D に関する逆像だから，U, V は共に X の開集合となる．　□

p. 66　問 14. 3　(X, d) を距離空間とする．X の空でない部分集合 A, B に対して集合 A, B の**距離**を

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) : \ a \in A, \ b \in B\}$$

と定義する．特に A, B を互いに交わらない空でない閉集合とすれば，常に $d(A, B) > 0$ が成り立つか．

解答　$X = \mathbb{R} - \{0\}$ とし，d を $\mathbb{R}$ 上の Euclid 距離 (絶対値) を X に制限したものとする．$A = \{x \in X : x < 0\}$，$B = \{x \in X : x > 0\}$ とすれば A, B は共に X の閉集合であり，$A \cap B = \varnothing$ となる．$n = 1, 2, \cdots$ に対し $d(-1/n, 1/n) = |-1/n - 1/n| = 2/n \to 0$　$(n \to \infty)$ より $d(A, B) = 0$ となる．従って交わりがなくても距離が 0 となる場合がある．

(他の反例 (p.195)) 2 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^2$ に於いて $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$，$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ とする．$n = 1, 2, \ldots$ に対し $a_n = (0, n) \in A$, $b_n = (1/n, n) \in B$ とすれば $d(a_n, b_n) = 1/n \to 0$　$(n \to \infty)$．従って $d(A, B) = 0$ である．　□

p. 66　問 14. 4　距離空間 (X, d) に於いて，A, B を互いに交わらない空でない閉集合とする．

$$g(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$$

によって定義される実数値関数 $g : X \to \mathbb{R}$ は距離空間 (X, d) から 1 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}$ への連続写像である事を示し，更に

$$0 \leq g(x) \leq 1 \quad (x \in X), \qquad g(x) = 0 \quad (x \in A), \qquad g(x) = 1 \quad (x \in B)$$

が成立する事を示せ．

解答 後半の主張は自明．問 14.1 より $d(x, A), d(x, B)$ は連続関数．今，$d(x, A) = d(x, B) = 0$ となる x が存在したとする．距離の定義より任意の $\varepsilon > 0$ に対し $B(x; \varepsilon) \cap A$，$B(x; \varepsilon) \cap B \neq \varnothing$ となるから $x \in \overline{A} \cap \overline{B} = A \cap B$ となるが，これは仮定に反する．故に常に $d(x, A) + d(x, B) > 0$ が成立．これより g も再び連続関数となる事が分かる． $\square$