

§ 13 距離空間

p. 58 問 13. 1 $B([a, b])$ によって閉区間 $[a, b]$ 上の有界な実数値関数全体の集合を表す. 即ち, 関数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ が集合 $B([a, b])$ に属するのは, ある正の実数 K が存在して $|f(x)| \leq K$ ($a \leq x \leq b$) が成り立つときである. $B([a, b])$ の 2 元 f, g に対して

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : a \leq x \leq b\}$$

と定義する. d は集合 $B([a, b])$ 上の距離関数である事を示せ.

解答 $f, g \in B([a, b])$ とする. $K > 0$ に対し $|f(x)|, |g(x)| \leq K$ ($x \in [a, b]$) だとする. このとき $|f(x) - g(x)| \leq 2K$ だから $d(f, g) \leq 2K$, 即ち $d(f, g)$ は実数値として確定する.

D₁ $d(f, g) \geq 0$, $d(f, f) = 0$ は自明. また $|f(x) - g(x)| \leq d(f, g)$ より $d(f, g) = 0 \Rightarrow f = g$ も明らか.

D₂ $d(f, g) = d(g, f)$ は自明.

D₃ $f, g, h \in B([a, b])$ とする. 絶対値に関する三角不等式より

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \leq d(f, h) + d(h, g) \quad (a \leq x \leq b)$$

だから $d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g)$ となる.

以上により d は距離の公理を満たす事が確められた. □

p. 58 問 13. 2 (改題) 複素数列 $x = \{x_n\}_{n=1,2,\dots}$ で $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$ となるものの全体を l^2 で表す. l^2 の 2 元 x, y に対し実数

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2}$$

が定まる事を示し, 更に d_2 は l^2 上の距離関数である事を示せ. (l^2, d_2) を **Hilbert 空間** という.

※ x が実数列の場合についてのみ考えれば元の問題となる.

解答 $\|\cdot\|_2 : l^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2}$ で定義する. 先ず次の事を示す:

(1) $|\sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$ (Schwarz の不等式, \bar{y}_n は複素数 y_n の複素共役).

(2) $\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$.

(1) N を任意の自然数とすると, \mathbb{C}^N に於ける Schwarz の不等式 (例えば 三宅敏恒著「線形代数学」(培風館 2008) 第 9 章 参照) より

$$\left| \sum_{n=1}^N x_n \bar{y}_n \right|^2 \leq \left(\sum_{n=1}^N |x_n|^2 \right) \left(\sum_{n=1}^N |y_n|^2 \right) \leq \|x\|_2^2 \|y\|_2^2$$

となるから, $N \rightarrow \infty$ とすれば $|\sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$ となる.

(2) Schwarz の不等式より

$$\begin{aligned} \|x+y\|_2^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} |x_n+y_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (x_n\bar{y}_n + \bar{x}_ny_n) + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 \\ &\leq \|x\|_2^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} x_n\bar{y}_n + \|y\|_2^2 = \|x\|_2^2 + 2\operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\bar{y}_n \right) + \|y\|_2^2 \\ &\leq \|x\|_2^2 + 2 \left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n\bar{y}_n \right| + \|y\|_2^2 \leq \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 + \|y\|_2^2 = (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2 \end{aligned}$$

よって $\|x+y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$ となる。

次に $x, y \in l^2$ に対し $d_2(x, y) \in \mathbb{R}$ を示す*3 一般の複素数列 x , 複素数 α に対し $\|\alpha x\|_2 = |\alpha| \|x\|_2$ となる事は容易に分かる。これと (2) の結果より

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2} = \|x - y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|(-y)\|_2 = \|x\|_2 + \|y\|_2 < \infty.$$

従って $d_2(x, y)$ は確定した値を持つ事になる。

最後に d_2 が l^2 上の距離関数である事を示す。定義より $d_2(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ 及び $d(x, y) = d(y, x)$ は自明。 $x, y, z \in l^2$ について (2) より

$$d(x, y) = \|x - y\|_2 \leq \|x - z\|_2 + \|z - y\|_2 = d_2(x, z) + d_2(z, y)$$

だから三角不等式も成り立ち、故に d_2 は l^2 上の距離関数となる。 \square

p. 59 問 13. 3 距離空間 (X, d) の部分集合 $B(a; r) (= \{x \in X : d(x, a) < r\}, r > 0)$ について、例 12.1 と同様な結果が成り立つかどうか検討せよ。

解答 $\{x \in X : d(x, a) < r\}$, $\{x \in X : d(x, a) = r\}$, $\{x \in X : d(x, a) > r\}$ をそれぞれ $B_< (= B(a; r))$, $B_=$, $B_>$ と置く。このとき $B = B(a; r)$ に対し

$$B^i = B_<, \quad B^f \subset B_=, \quad B^e \supset B_>$$

が成立する。

$B^i = B_<$ について: $B^i \subset B_<$ は自明だから、 $B^i \supset B_<$ について考える。 $x \in B_<$ のとき $\varepsilon = r - d(x, a) > 0$ と置けば、任意の $y \in B(x; \varepsilon)$ に対し

$$d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a) < \varepsilon + d(x, a) = r$$

だから $B(x; \varepsilon) \subset B$, $x \in B^i$, 従って $B^i \supset B_<$. 故に $B^i = B_<$ である。

$B^e \supset B_>$ について: $x \in B_>$ だとすると $\varepsilon := d(x, a) - r > 0$ であり、 $y \in B(x; \varepsilon)$ に対し

$$d(y, a) \geq d(x, a) - d(x, y) > d(x, a) - \varepsilon = d(x, a) - (d(x, a) - r) = r$$

だから $B(x; \varepsilon) \subset B^e$, $x \in B^e$. 従って $B^e \supset B_>$ である。

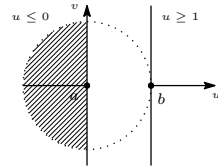
$B^f \subset B_=$ について: $X = B^i \amalg B^f \amalg B^e$, $X = B_< \amalg B_= \amalg B_>$ 及び $B^i = B_<$, $B^e \supset B_>$ より $B^f \subset B_=$ となる。

($B^f \supset B_=$ の反例) (X, d) を 2 個以上の点を含む離散距離空間とし、 $a \in X$ とすると $B(a; 1) = \{a\}$, $B_= = X - \{a\}$, $B_> = \emptyset$ となる。一方、 $x \in B(a; 1)^f$ だとすると $B(x; 1) \cap B(a; 1) \neq \emptyset$, $B(x; 1) \cap B(a; 1)^c \neq \emptyset$ が成立。後者より $b \in B(x; 1)$

*3 d_2 の定義で、根号の中に無限和が現れるため、この値は発散する事もある。 $x, y \in l^2$ である事から $d_2(x, y)$ の根号の中の無限和が収束する事は自明な事ではない。

となる $b \in B(a; 1)^c$ がとれる. $d(b, x) < 1$ より $b = x$, $d(b, a) \geq 1$ より $b \neq a$ が成立. 一方, 前者より $a \in B(x; 1) = \{x\}$, 従って $x = a$ となるが, これは $b = a$ を導き矛盾. 故に $B(a; 1)^f = \emptyset$, 従って $B(a; 1)^f \neq B_-$ である. \square

($B^f \supset B_-$ の反例 その 2 [内田] p.194) $X = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \leq 0 \text{ または } u \geq 1\}$ とし, \mathbb{R}^2 上の Euclid 距離を X へ制限したものを d とする. d は X 上の距離関数となる. $a = (0, 0) \in X$ を中心とし, 1 を半径とする開球体 $B(a; 1)$ に対し $b = (1, 0)$ とする. $d(b, a) = 1$, 特に $b \notin B_>$. 一方, $B(b; 1) \cap B(a; 1) = \emptyset$ より $b \in B(a; 1)^e$ となる. \square



以上の反例により $B^f \supset B_-$, $B^e \subset B_>$ は一般に成立しない. \square

p. 60 問 13. 4 距離空間 (X, d) に於いて, 開集合の補集合は閉集合であり, また閉集合の補集合は開集合である事を確かめよ.

解答 O を開集合とし, その補集合の点 $x \in O^c$ をとる. 或る $\varepsilon > 0$ に対し $U_\varepsilon^d(x) \cap O^c = \emptyset$, 即ち $U_\varepsilon^d(x) \subset O$ だとすると $x \in O^i = O$ となり矛盾. 故に任意の $\varepsilon > 0$ に対して $U_\varepsilon^d(x) \cap O^c \neq \emptyset$ となり, よって $x \in O^{ca}$, 即ち O^c は閉集合である.

A を閉集合とし, その補集合の点 $x \in A^c$ をとる. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $U_\varepsilon^d(x) \not\subset A^c$, 即ち $U_\varepsilon^d(x) \cap A \neq \emptyset$ だとすると $x \in A^a = A$ となり矛盾. 故に $U_\varepsilon^d(x) \subset A^c$ となる $\varepsilon > 0$ が存在し, よって $x \in A^{ci}$, 即ち A^c は開集合である. \square

p. 60 問 13. 5 距離空間 (X, d) の開集合全体の集合を (X, d) の開集合系といい, \mathcal{O} で表す. \mathcal{O} について

- \mathbf{O}_1 $\emptyset, X \in \mathcal{O}$
- \mathbf{O}_2 $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ ならば $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$.
- \mathbf{O}_3 $O_\lambda \in \mathcal{O}$ ($\lambda \in \Lambda$) ならば $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$.

が成り立つ事を確かめよ.

解答 一般の部分集合 $A \subset X$ に対し, A の内部を A^i と記す. $A^i \subset A$ となる事, 及び $O \in \mathcal{O} \Leftrightarrow O^i = O$ となる事に注意する.

\mathbf{O}_1 $\emptyset^i \subset \emptyset$. よって $\emptyset^i = \emptyset$, $\emptyset \in \mathcal{O}$ である. また任意の $x \in X$ に対し $U_1^d(x) \subset X$ より $x \in X^i$, 従って $X = X^i$, $X \in \mathcal{O}$ である.

\mathbf{O}_2 $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ とする. $x \in O_1 \cap O_2$ について, $x \in O_j = O_j^i$ より $U_{\varepsilon_j}^d(x) \subset O_j$ となる $\varepsilon_j > 0$ が存在. $0 < \varepsilon < \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ となる ε をとれば $U_\varepsilon^d(x) \subset O_1 \cap O_2$ となり, これより $x \in (O_1 \cap O_2)^i$ となる. 従って $(O_1 \cap O_2)^i = O_1 \cap O_2$, $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$ となる.

\mathbf{O}_3 $O_\lambda \in \mathcal{O}$ ($\lambda \in \Lambda$) とする. $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ のとき, $x \in O_\lambda$ となる $\lambda \in \Lambda$ が存在し, 更に $U_\varepsilon^d(x) \subset O_\lambda$ となる $\varepsilon > 0$ が存在する. これより $U_\varepsilon^d(x) \subset O_\lambda \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ が成立. よって $(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda)^i = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$ となる. \square

p. 60 問 13. 6 距離空間 (X, d) の閉集合全体の集合を (X, d) の閉集合系といい, \mathfrak{A} で表す. \mathfrak{A} について

- \mathbf{F}_1 $\emptyset, X \in \mathfrak{A}$
- \mathbf{F}_2 $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}$ ならば $A_1 \cup A_2 \in \mathfrak{A}$.
- \mathbf{F}_3 $A_\lambda \in \mathfrak{A}$ ($\lambda \in \Lambda$) ならば $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \mathfrak{A}$.

が成り立つ事を確かめよ.

解答 問 13.4, 13.5 と de Morgan の法則より明らか. \square

解答 (別解 : 問 13. 4 を用いず直接証明する)

\mathbf{F}_1 一般の部分集合 $A \subset X$ に対し $A \subset A^a$ だから $X \subset X^a$. よって $X = X^a$, $X \in \mathfrak{A}$ である. また任意の $x \in X$ 及び

$\varepsilon > 0$ に対し $U_\varepsilon^d(x) \cap \emptyset = \emptyset$ より \emptyset の触点は存在しない。即ち $\emptyset^a = \emptyset$, $\emptyset \in \mathfrak{A}$ となる。

F₂ 部分集合 A, B について $A \subset B$ だとする。 $x \in A^a$ ならば、任意の $\varepsilon > 0$ に対し $U_\varepsilon^d(x) \cap B \supset U_\varepsilon^d(x) \cap A \neq \emptyset$ となるから $x \in B^a$, 従って $A^a \subset B^a$ となる。これより一般の部分集合 A, B に対し $A^a \cup B^a \subset (A \cup B)^a$ が成り立つ。逆に $x \in (A \cup B)^a$ だとする。 $x \notin A^a$ とすると $U_{\varepsilon_0}^d(x) \subset A^c$ となる $\varepsilon_0 > 0$ が存在。一方、 $U_{\varepsilon_0}^d(x) \cap (A \cup B) = \emptyset$ だから $U_{\varepsilon_0}^d(x) \cap B \neq \emptyset$ 。これより $\varepsilon \geq \varepsilon_0$ ならば $U_\varepsilon^d(x) \cap B \neq \emptyset$ となる。一方、 $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ に対し $U_\varepsilon^d(x) \subset A^c$ だから、 $x \in (A \cup B)^a$ より $U_\varepsilon^d(x) \cap B \neq \emptyset$ が成立。よって $x \in B^a$, 故に $(A \cup B)^a = A^a \cup B^a$ となる。これより $A, B \in \mathfrak{A}$ ならば $(A \cup B)^a = A \cup B$, 即ち $A \cup B \in \mathfrak{A}$ となる。

F₃ $A_\lambda \in \mathfrak{A}$ ($\lambda \in \Lambda$) とする。 $x \in (\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^a$ のとき、任意の $\varepsilon > 0$ に対し $U_\varepsilon^d(x) \cap \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \neq \emptyset$, 従って $U_\varepsilon^d(x) \cap A_\lambda \neq \emptyset$ ($\lambda \in \Lambda$), $x \in A_\lambda^a = A_\lambda$ となるから $x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ 。故に $(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^a \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \mathfrak{A}$ となる。 \square

p. 60 問 13. 7 距離空間 (X, d) と X の部分集合 A について、 A^i は A に含まれる最大の開集合であり、 A^a は A を含む最小の開集合である事を示せ。

解答 定理 13.1 より A^i は開集合、 A^a は閉集合である。

今、 O を A に含まれる開集合とする。 $x \in O$ ならば $U_\varepsilon^d(x) \subset O$ となる $\varepsilon > 0$ が存在。特に $U_\varepsilon^d(x) \subset A$ となるから $x \in A^i$, よって $O \subset A^i$ となる。故に A^i は A に含まれる最大の開集合である。

次に F を A を含む閉集合とする。 $x \in A^a$ ならば任意の $\varepsilon > 0$ に対し $F \cap U_\varepsilon^d(x) \supset A \cap U_\varepsilon^d(x) \neq \emptyset$ だから $x \in F^a = F$, よって $A^a \subset F$ となる。故に A^a は A を含む最小の開集合である。 \square

p. 63 問 13. 8 (X, d) を距離空間とする。 X の部分集合 A, B について次式が成り立つ事を示せ。

$$(A \cap B)^i = A^i \cap B^i, \quad (A \cup B)^a = A^a \cup B^a, \quad (A \cup B)^d = A^d \cup B^d.$$

解答 (i) $A \subset B$ ならば $A^i \subset B^i$, $A^a \subset B^a$, $A^d \subset B^d$ となる。

(証明) $x \in A^i$ ならば $U_\varepsilon^d(x) \subset A$ となる $\varepsilon > 0$ が存在。 $A \subset B$ より $U_\varepsilon^d(x) \subset B$ となるから $x \in B^i$ 。従って $A^i \subset B^i$ となる。

$x \in A^a$ のとき、任意の $\varepsilon > 0$ に対し $B \cap U_\varepsilon^d(x) \supset A \cap U_\varepsilon^d(x) \neq \emptyset$ より $x \in B^a$ となる。

$x \in A^d$ のとき、任意の $\varepsilon > 0$ に対し $(B - \{x\}) \cap U_\varepsilon^d(x) \supset (A - \{x\}) \cap U_\varepsilon^d(x) \neq \emptyset$ より $x \in B^d$ となる。 \blacksquare

(ii) $(A \cap B)^i = A^i \cap B^i$ について： (i) より $(A \cap B)^i \subset A^i \cap B^i$ は自明。 $x \in A^i \cup B^i$ だとすると $U_\varepsilon^d(x) \subset A$ かつ $U_\varepsilon^d(x) \subset B$ となる $\varepsilon > 0$ が存在。 $U_\varepsilon^d(x) \subset A \cap B$ より $x \in (A \cap B)^i$ 。故に $(A \cap B)^i = A^i \cap B^i$ となる。

(iii) $(A \cup B)^a = A^a \cup B^a$ について： $A^a \cup B^a \subset (A \cup B)^a$ は自明。 $x \in (A \cup B)^a$ かつ $x \notin A^a$ だとする。後者より $A \cap U_{\varepsilon_0}^d(x) = \emptyset$ となる $\varepsilon_0 > 0$ がとれる。 $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ なる任意の ε に対し $A \cap U_\varepsilon^d(x) \subset A \cap U_{\varepsilon_0}^d(x)$ となるから $A \cap U_\varepsilon^d(x) = \emptyset$ となる。一方、前者より

$$(A \cap U_\varepsilon^d(x)) \cup (B \cap U_\varepsilon^d(x)) = (A \cup B) \cap U_\varepsilon^d(x) \neq \emptyset$$

だから $B \cap U_\varepsilon^d(x) \neq \emptyset$ となる。さらに $\varepsilon_0 \leq \varepsilon$ となる $\varepsilon > 0$ に対し

$$B \cap U_\varepsilon^d(x) \supset B \cap U_{\varepsilon_0}^d(x) \neq \emptyset.$$

これらより $x \in B^a$, 故に $(A \cup B)^a = A^a \cup B^a$ となる。

(iv) $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$ について： A, B を $A - \{x\}, B - \{x\}$ に置き換えれば (iii) と同様の議論により等式が示される。 \square

p. 63 問 13. 9 (X, d) を距離空間とし

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \quad (x, y \in X)$$

と置く. d' もまた集合 X 上の距離関数である事を示し, さらに (X, d) の開集合系と (X, d') の開集合系は一致する事を示せ.

解答 **D**₁ $d(x, y) \geq 0$ より $d'(x, y) \geq 0$. また $d'(x, y) = 0$ ならば $d(x, y) = 0$, 従って $x = y$ となる.

D₂ $d'(y, x) = d(y, x)/\{1 + d(y, x)\} = d(x, y)/\{1 + d(x, y)\} = d'(x, y)$.

D₃ $f(t) = t/(1+t)$ ($t > -1$) とすると, $f'(t) = 1/(1+t)^2 > 0$ より単調増加である. これより $x, y, z \in X$ に対し

$$\begin{aligned} \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} &\leq \frac{d(x, z) + d(z, y)}{1 + d(x, z) + d(z, y)} \\ &= \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z) + d(z, y)} + \frac{d(z, y)}{1 + d(x, z) + d(z, y)} \leq \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z)} + \frac{d(z, y)}{1 + d(z, y)} \end{aligned}$$

より d' は三角不等式を満たす.

以上より d' は X 上の距離関数である事が確められた. d' について常に $0 \leq d'(x, y) < 1$ となる事に注意する.

次に開集合系 $\mathfrak{D}_d, \mathfrak{D}_{d'}$ が一致する事を示す. $x, y \in X$ に対し $d(x, y) < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) だとする. 上の **D**₃ の証明に於ける関数 $f(t)$ は狭義単調増加だから $d(x, y) < \varepsilon \Leftrightarrow d'(x, y) < \varepsilon/(1 + \varepsilon)$ が成立. これより $U_\varepsilon^d(x) = U_{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}^{d'}(x)$ となる. 一方, $0 < \delta < 1$ に対し $d'(x, y) < \delta \Leftrightarrow d(x, y) < \delta/(1 - \delta)$ が成立. これより $U_\delta^{d'}(x) = U_{\frac{\delta}{1-\delta}}^d(x)$ となる.

今, $O \in \mathfrak{D}_d$ だとする. $x \in O$ に対し $U_\varepsilon^d(x) \subset O$ となる $\varepsilon > 0$ が存在. $U_{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}^{d'}(x) \subset O$ となるから O の点は d' に関する内点でもあり, よって $O \in \mathfrak{D}_{d'}$ である. 逆に $O \in \mathfrak{D}_{d'}$ とする. $x \in O$ に対し $U_\delta^{d'}(x) \subset O$ となる $\delta > 0$ が存在. 特に $\delta < 1$ としてもよい. このとき $U_{\frac{\delta}{1-\delta}}^d(x) \subset O$ となるから O の点は d に関する内点でもあり, よって $O \in \mathfrak{D}_d$ である.

以上より $\mathfrak{D}_d = \mathfrak{D}_{d'}$ となる事が示された. □