第 4 章　距離空間

§ 12　ユークリッド空間

例題　等式 $\mathbb{R}^n = M^i \amalg M^e \amalg M^f$　($p.52\ l.4$) を証明せよ[*1].

証明 次の 4 点を示せばよい：(1) $\mathbb{R}^n = M^i \cup M^e \cup M^f$. (2) $M^i \cap M^e = \varnothing$. (3) $M^i \cap M^f = \varnothing$. (4) $M^e \cap M^f = \varnothing$.

(1) $\supset$ は自明なので，逆の包含関係を示せばよい． $x \in \mathbb{R}^n$ について $x \in M^f$ または $x \notin M^f$ の一方のみが成立する．$x \in M^f$ ならば $x \in M^i \cup M^e \cup M^f$．一方，$x \notin M^f$ だとすると，定義より「或る $\varepsilon > 0$ に対し $B(x;\varepsilon) \cap M = \varnothing$」または「或る $\varepsilon > 0$ に対し $B(x;\varepsilon) \cap M^c = \varnothing$」の少なくとも一方が成立する[*2]．前者は「或る $\varepsilon > 0$ に対し $B(x;\varepsilon) \subset M^c$」，すなわち $x \in M^e$ である事と同値，後者は「或る $\varepsilon > 0$ に対し $B(x;\varepsilon) \subset M$」，すなわち $x \in M^i$ である事と同値だから，x は M^f, M^e または M^i の何れかに属する．

(2) $x \in M^i \cap M^e$ だとすると $B(x;\varepsilon) \subset M$，$B(x;\eta) \subset M^c$ となる $\varepsilon, \eta > 0$ が存在．このとき $x \in B(x;\varepsilon) \cap B(x;\eta) \subset M \cap M^c$ となるが，これは $M \cap M^c = \varnothing$ に反する．
(3) $x \in M^i \cap M^f$ だとする．$x \in M^i$ より $B(x;\varepsilon) \subset M$，即ち $B(x;\varepsilon) \cap M^c = \varnothing$ となる $\varepsilon > 0$ が存在．しかしこれは $x \in M^f$ である事に反する．

(4) $x \in M^e \cap M^f$ だとする．$x \in M^e$ より $B(x;\varepsilon) \subset M^c$，即ち $B(x;\varepsilon) \cap M = \varnothing$ となる $\varepsilon > 0$ が存在．しかしこれは $x \in M^f$ である事に反する．

以上より等式 $\mathbb{R}^n = M^i \amalg M^e \amalg M^f$ の成立が示された．□

p. 54　問 12. 1　$\mathbb{R}^n$ の部分集合 M について，$(M^i)^i = M^i$ 及び $(M^a)^a = M^a$ が成り立つ事を示せ．

解答　$(M^i)^i \subset M^i$ は自明 (p. 51 参照)．一方，$x \in M^i$ だとすると $B(x;\varepsilon) \subset M$ となる $\varepsilon > 0$ が存在．任意の $y \in B(x;\varepsilon)$ について $0 < \eta < \varepsilon - d(x,y)$ となる η をとるとき，任意の $z \in B(y;\eta)$ について

$$d(x,z) < d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + \eta < \varepsilon$$

となるから $B(y;\eta) \subset B(x;\varepsilon) \subset M$，よって $y \in M^i$ となる．これより $B(x;\varepsilon) \subset M^i$ だから $x \in (M^i)^i$，従って $M^i \subset (M^i)^i$ が成立．故に $(M^i)^i = M^i$ である．

$M^a \subset (M^a)^a$ は自明 (p. 53 参照)．$x \in (M^a)^a$ とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対し $y \in B(x;\varepsilon/2) \cap M^a$ がとれる．また $y \in M^a$ より $z \in B(y;\varepsilon/2) \cap M$ がとれる．このとき

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

だから $z \in B(x;\varepsilon) \cap M$，即ち $x \in M^a$ となり，故に $M^a = (M^a)^a$ である．□

[*1] 一般に X, Y の和集合を $X \cup Y$ によって表すが，特に $X \cap Y = \varnothing$ の場合，$X \cup Y$ を改めて $X \amalg Y$ と記し，これを X と Y の**直和** (direct sum) という．直和を $X \sqcup Y$，$X + Y$，$X \dot{+} Y$，$X \oplus Y$ 等と記す事もある．

[*2] 命題 P, Q を

$$P : \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対し } B(x;\varepsilon) \cap M = \varnothing, \qquad Q : \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対し } B(x;\varepsilon) \cap M^c = \varnothing$$

と置けば $x \in M^f$ であるとは x について $P \wedge Q$　($= P$ かつ Q) が成り立つ事に他ならない．従って $x \notin M^f$ とは x について $\neg(P \wedge Q) = (\neg P) \vee (\neg Q)$ が成立する事である．

p. 54　問 12. 2　$a_i, b_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)$ を $a_i < b_i$ であるような実数とする．集合

$$\{x \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)\} = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n)$$

は $\mathbb{R}^n$ の開集合であり，集合

$$\{x \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)\} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である事を示せ．

解答　$I = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ が開集合である事：$x = (x_1, \cdots, x_n) \in I$ に対し $0 < \varepsilon < \min\{|a_i - x_i|,\ |b_i - x_i| \ (i = 1, \ldots, n)\}$ となる ε をとる．任意の $y = (y_1, \cdots, y_n) \in B(x; \varepsilon)$ に対し

$$|y_i - x_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2} = d(x, y) < \varepsilon \leq |a_i - x_i|,\ |b_i - x_i| \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

だから $y \in I$，従って $B(x; \varepsilon) \subset I$．故に I の任意の点は内点となり，I は開集合である．

$J = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ が閉集合である事：

$$J = ([a_1, b_1] \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap (\mathbb{R} \times [a_2, b_1] \times \mathbb{R}^{n-2}) \cap \cdots \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times [a_n, b_n]) = \bigcap_{j=1}^{n} \mathbb{R}^{j-1} \times [a_j, b_j] \times \mathbb{R}^{n-j}$$

より J の補集合 J^c は

$$\begin{aligned} J^c &= \left(\bigcap_{j=1}^{n} \mathbb{R}^{j-1} \times [a_j, b_j] \times \mathbb{R}^{n-j} \right)^c = \bigcup_{j=1}^{n} (\mathbb{R}^{j-1} \times [a_j, b_j] \times \mathbb{R}^{n-j})^c \\ &= \bigcup_{j=1}^{n} (\mathbb{R}^{j-1} \times (-\infty, a_j) \times \mathbb{R}^{n-j} \cup \mathbb{R}^{j-1} \times (b_j, \infty) \times \mathbb{R}^{n-j}). \end{aligned}$$

前者より $\mathbb{R}^{j-1} \times (-\infty, a_j) \times \mathbb{R}^{n-j}$，$\mathbb{R}^{j-1} \times (b_j, \infty) \times \mathbb{R}^{n-j}$ は開集合だから，**定理 12.2** (3) より J^c は開集合．従って**定理 12.1** より J は閉集合である．　□

p. 56　問 12. 3　$\mathbb{R}^n$ の閉集合全体の集合 ($\mathbb{R}^n$ の**閉集合系**という) を $\mathfrak{A}$ で表すとき，$\mathfrak{A}$ は次の条件を満足する事を示せ．

(1)　$\mathbb{R}^n \in \mathfrak{A}$，$\varnothing \in \mathfrak{A}$．

(2)　$A_1, \ldots, A_k \in \mathfrak{A}$ ならば $A_1 \cup \cdots \cup A_k \in \mathfrak{A}$．

(3)　$A_\lambda \in \mathfrak{A} \ (\lambda \in \Lambda)$ ならば $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \mathfrak{A}$．

解答　(1)　$\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n$ は自明．$x \in \overline{\varnothing}$ だとすると $B(x; \varepsilon) \cap \varnothing \neq \varnothing \quad (\forall\, \varepsilon > 0)$ という矛盾が導かれるから $\overline{\varnothing} = \varnothing$．$\therefore\ \mathbb{R}^n, \varnothing \in \mathfrak{A}$.

(2)　$A_1, \ldots, A_k \in \mathfrak{A}$ だとする．$x \in \overline{A_1 \cup \cdots \cup A_k}$ について $x \notin A_i = \overline{A_i} \quad (\forall\, i)$ だとすると，$B(x; \varepsilon) \cap A_i = \varnothing$ となる $\varepsilon > 0$ が存在．$B(x; \varepsilon) \cap (A_1 \cup \cdots \cup A_k) = \varnothing$ となるが，これは x のとり方に反する．従って $\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_k} = A_1 \cup \cdots \cup A_k$，即ち $A_1 \cup \cdots \cup A_k \in \mathfrak{A}$.

(3)　$A_\lambda \in \mathfrak{A} \ (\lambda \in \Lambda)$ だとする．$x \in \overline{\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda}$ だとすると任意に $\lambda \in \Lambda$ に対し

$$B(x; \varepsilon) \cap A_\lambda \supset B(x; \varepsilon) \cap \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) \neq \varnothing \qquad (\varepsilon > 0),$$

従って $x \in \overline{A_\lambda} = A_\lambda$ となり，$x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$．よって $\overline{\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$，即ち $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \mathfrak{A}$ となる．　□

p. 56　問 12. 4　$\mathbb{R}^n$ の部分集合 M について，内部 M^i は M に含まれる最大の開集合であり，閉包 $\overline{M}$ は M を含む最小の閉集合である事を示せ．

解答　内部の定義，及び **問 12．1** より M^i は M^i は M に含まれる開集合である．次に O を M に含まれる開集合だとする．任意の $x \in O$ に対し $B(x;\varepsilon) \subset O$ となる $\varepsilon > 0$ が存在．$O \subset M$ だから $B(x;\varepsilon) \subset M$，従って $x \in M^i$，即ち $O \subset M^i$ となる．

閉包の定義，及び **問 12．1** より $\overline{M}$ は M を含む閉集合である．次に F を M を含む閉集合だとする．$x \in \overline{M}$ のとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対し $B(x;\varepsilon) \cap F \supset B(x;\varepsilon) \cap M \neq \varnothing$ となるから，$x \in \overline{F} = F$．従って $x \in F$，即ち $\overline{M} \subset F$ となる．　□